

# بحوث العمليات

Operation Research

تأليف

دكتور سليمان محمد مرجان



## المحتويات Contents

23	..... المقدمة
29	..... الفصل الأول: مفهوم وأهمية علم بحوث العمليات
30	..... التطور التاريخي لعلم بحوث العمليات
30	..... استخدام علم بحوث العمليات في النواحي الحربية
30	..... استخدامه في بريطانيا
31	..... استخدامه في أمريكا
31	..... استخدامه في كندا
32	..... استخدام علم بحوث العمليات في المجالات المدنية
37	..... أهم أساليب وأدوات بحوث العمليات
38	..... أسئلة
38	..... الفصل الثاني: إتخاذ القرارات
38	..... المقدمة
39	..... خطوات اتخاذ القرارات
40	..... ظروف (المناخ) اتخاذ القرارات
41	..... حالة التأكد التام
41	..... حالة المخاطرة
41	..... حالة عدم التأكد
41	..... نماذج اتخاذ القرارات
43	..... النموذج العام
45	..... شجرة القرارات
46	..... إتخاذ القرارات تحت حالة التأكد التام
46	..... إتخاذ القرارات تحت حالة عدم التأكد

71	أمانة كفيفة إيجاد التكوين النهائي في حالة القيمة المعظمى
72	2- تكوين المشكلة في حالة القيمة الصغرى
74	أمانة كفيفة إيجاد التكوين النهائي في حالة القيمة الصغرى
76	طرق البرمجة الخطية
76	1- طريقة التحليل البياني
76	1- استخدام طريقة التحليل البياني لحل مشكلة القيمة المعظمى
83	ب - استخدام طريقة التحليل البياني لحل مشكلة القيمة الصغرى
85	2- طريقة السبيلكس (المامة)
86	1- استخدام طريقة السبيلكس لحل مشكلة القيمة المعظمى
86	الشكل المعياري للنموذج
94	ملخص خطوات الطريقة العامة لحل مشاكل القيمة المعظمى
95	ب - استخدام طريقة السبيلكس لحل مشكلة القيمة الصغرى
97	حل مشكلة القيمة الصغرى بواسطة إجراءات القيمة المعظمى
97	استخدام إجراءات وقواعد القيمة الصغرى
99	تحليل الحساسية
101	1- التغير في الطرف الأيمن للمعادلات
105	2- التغير في معاملات دالة الهدف
107	مشكلة الأزواج (النموذج المقابل)
108	أمانة النموذج المقابل
108	المشاكل العامة للنموذج المقابل
111	المعاني الاقتصادية لمشكلة الأزواج (النموذج المقابل)
112	الحالات الخاصة للبرمجة الخطية
112	1- التفسخ أو الانحلالية
114	2- الحلول البديلة
116	3- الحلول غير المحدودة
119	4- عدم توفر الحل
121	أسئلة
121	تعارين
130	الفصل الرابع: نفاذ النقل
130	المقدمة
131	الخطوات الأساسية لحل مشاكل النقل
132	1- مشكلة البحث عن أقل تكلفة ممكنة

46	1- طريقة تنظيم أكبر عائد يمكن تحقيقه
46	ب - طريقة تنظيم أقل عائد يمكن تحقيقه
47	ج - طريقة تقليل أكبر خسارة يمكن تكديدها
47	إنشاء القرارات تحت حالة المخاطرة أو المجازرة
47	1- طريقة القيمة المتوقعة
49	القيمة المتوقعة للمعلومات الكاملة
50	2- طريقة السبيل غير الكافي
51	3- طريقة أكبر احتمال
51	خطوات تحديد المدخل الكمي في اتخاذ القرارات
52	النماذج الرياضية وأنواعها
52	1- النماذج الساكنة (الإستاتيكية)
53	2- النماذج الحركية (الديناميكية)
53	3- نفاذ الحصول على الحل الأمثل
53	4- نموذج عدم الحصول على الحل الأمثل
53	النموذج المحدد
53	النموذج الاحتمالي
53	أسئلة
55	تعارين
55	الفصل الثالث: البرمجة الخطية
59	المقدمة
59	استخدامات البرمجة الخطية
60	الشروط الأساسية لتطبيق أسلوب البرمجة الخطية
61	توضيح بعض المصطلحات العامة للبرمجة الخطية
61	الخطوات الأساسية لمشكلة البرمجة الخطية
62	1- تحديد طبيعة المشكلة
62	2- تحديد المتغيرات
62	3- تحديد دالة الهدف
63	4- تحديد الحدود والقيد
63	5- التكوين النهائي للمشكلة
63	6- استخدام إحدى طرق البرمجة الخطية
63	تكوين أو بناء المشكلة على صورة معادلات رياضية
63	1- تكوين المشكلة في حالة القيمة المعظمى

169	بعض الأخطاء في بناء الشبكة البينية
170	طرق تحليل الشبكات
171	بناء نموذج التحليل الشبكي
173	أمانة عن كيفية بناء الشبكة البينية
176	1- طريقة المسار الحرج
178	ملخص لخطوات تحديد المسار الحرج على الشبكة
178	تخفيض فترة تنفيذ المشروعات
183	الأنشطة الوهمية
185	2- طريقة بيرشه
191	تحليل الموارد
200	مشكلة أقصر مسار
202	مشكلة أطول مسار
205	أسئلة
205	تمارين
207	الفصل السادس: نموذج المخزون
207	المقدمة
209	طبيعة المخزون وأنواعه
209	أهمية المخزون ودواعي الاحتفاظ به
209	- المقصود بوظيفة التخزين
210	- مفهوم التخزين
212	- أهمية المخزون
213	- دواعي الاحتفاظ بالمخزون
216	مخاطر وعيوب انخفاض مستوى المخزون
216	مخاطر وعيوب ارتفاع مستوى المخزون
217	أنواع المخزون والتكاليف المرتبطة بها
217	أولاً - الأنواع المختلفة للمخزون
217	1- أنواع المخزون في إطار التوصيف الهيكلي
218	أ- المخزون من المواد الخام
218	ب- المخزون من الأجزاء والتجميعات الجزئية
218	ج- المخزون تحت التشغيل
218	د- المخزون من المنتجات التامة الصنع
218	هـ- المخزون من المهمات

133	المودج الرياضي لمشكلة النقل
134	طرق إيجاد التوزيع المبني
134	1- طريقة الأربعة الضلعية الغربية
136	2- طريقة الأقل تكلفة أو أقل الأضرار
138	3- طريقة الجراء أو طريقة فوجل
140	4- طريقة المعافضة المزدوجة
142	نموذج النقل غير المتوازن
144	طرق التأكد من الوصول إلى الحل الأمثل
144	1- طريقة حجر النقل (التخطي)
144	- وضع التوزيع في صورة جدول لأجراء التوزيع المبني
145	- تقويم الحللا غير المستغلة على طريقة الحجر المتقل
146	- تعديل التوزيع بتأخر تقويم الحللا غير المستغلة
149	2- طريقة التوزيع المعاملة
149	خطوات طريقة التوزيع المعاملة
149	ملخص الخطوات للتنمية
154	مشكلة النقل
155	إختيار مشكلة النقل
156	الطريقان ومشكلة النقل
158	- مشكلة البحث عن أعلى ربح ممكن (القيمة العظمى)
158	أسئلة
161	تمارين
162	الفصل الخامس: تحليل الشبكات
166	المقدمة
166	تعريف تحليل الشبكات
166	المنافع الرئيسة لتحليل الشبكات
166	- منافع أقصر الطرق
166	- منافع أقصى تدفق
166	- منافع شبكة أعمال الأنشطة
167	مزايا تطبيق تحليل الشبكات
167	بناء شبكة المشروع
168	القواعد والشروط الأساسية لبناء شبكة المشروع
168	المصطلحات الأساسية لبناء الشبكة البينية
168	



257	تعريف صفوف الانتظار
258	صفوف الانتظار والكلمة
259	العناصر الأساسية في نظام صفوف الانتظار
261	بعض الرموز الرياضية في نظام صفوف الانتظار
261	نماذج صفوف الانتظار
262	1- نموذج صفوف الانتظار ذات القناة الواحدة لتقديم الخدمة
267	2- نموذج صفوف الانتظار في حالة وجود أكثر من قناة واحدة لتقديم الخدمة
270	3- نموذج صفوف الانتظار ذات القناة الواحدة لتقديم الخدمة مع معلومة محدودة عن عدد الوحدات المتوقع أن تطلب الخدمة
271	4- نموذج صفوف الانتظار ذات القناة الواحدة لتقديم الخدمة مع معلومة أن طول الطابور محدود
272	5- نموذج صفوف الانتظار ذات القناة الواحدة لتقديم الخدمة مع معلومة عدم اتباع معدل تقديم الخدمة توزيع بواسون للاحتتمالات
273	6- نموذج صفوف الانتظار مع وجود عدد لا نهائي من مراكز تقديم الخدمة
275	أمثلة
275	تمارين
279	الفصل الثامن: نظرية المباريات أو الألعاب
279	المقدمة
279	المفاهيم الاقتصادية
280	تصنيفات المباريات:
80	1- مباريات الحظ والمهارة
81	2- المباراة الثنائية ذات الحصة الصفرية
81	3- المباريات الثنائية غير صفرية الحصة
31	4- المباريات متعددة الأطراف
1	الاستراتيجيات الصرفة والاستراتيجيات المختلطة
1	إفتراسات نظرية المباريات
1	قانون أدنى الأفضيات وأقصى الأدنيات وقيمة المباراة
1	دالة العائد والاستراتيجيات المثلى
1	تعدد البدائل أمام المتنافسين والبدائل المهمة (المسيطر)
1	تحديد الاستراتيجية المثلى بالبرمجة الخطية
1	أمثلة
1	تمارين

219	2- أنواع المخزون في إطار التوزيع السلوكي
219	2- أنواع المخزون في إطار التوزيع السلوكي
219	1- المخزون الاستراتيجي
220	2- المخزون الاحتياطي (الأمان)
221	3- المخزون الحركي (الدوري)
221	التكاليف المرتبطة بالمخزون
221	- تكاليف الطلب والتوريد
221	- تكاليف الإعلاء
221	- تكاليف فناء المخزون
221	- تكاليف استعمال التوريد
221	- تكاليف الاحتفاظ بالمخزون
222	- التكاليف الإدارية
223	مفاهيم مراقبة المخزون
224	دورة الرقابة على المخزون
224	النماذج الكمية للرقابة على المخزون
224	أولاً - تصنيف المخزون حسب نظام التصنيف الثلاثي $(A, B, C)$
226	مراحل تطبيق التحليل الثلاثي $(A, B, C)$ في الرقابة على المخزون
228	استخدامات التحليل الثلاثي $(A, B, C)$
232	ثانياً - سياسة مراقبة المخزون
233	تحديد الحجم الأمثل للطلبة التي يجب شرائها أو الكمية التي يجب إنتاجها
234	نموذج الكمية الاقتصادية للطلب
234	الفروض الأساسية لنموذج كمية الطلب الاقتصادية
235	إشتقاق كمية الطلب الاقتصادية رياضياً
236	إشتقاق كمية الطلب الاقتصادية رياضياً في حالة ما يتم توريد الطلبة على دفعات
242	إشتقاق كمية الطلب الاقتصادية رياضياً في حالة الشراء
245	نقطة إعادة الطلب
247	- تحديد نقطة إعادة الطلب في حالة التأكد التام
249	- تحديد نقطة إعادة الطلب في ظل عدم التأكد
249	- حالة ثبات معدل الاستخدام مع تغير فترة التوريد
252	- حالة تغير كل من معدل الاستخدام وفترة التوريد
253	أمثلة
253	تمارين
254	الفصل السابع: نماذج صفوف الانتظار
257	

315	2- المتغير العشوائي المتصل (المستمر)
315	ج- التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل
316	د- التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتصل (المستمر)
317	هـ - دالة التوزيع الاحتمالي التراكبي (التجميعي)
318	و- القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي
319	ز- التباين والانحراف المعياري
321	بعض أهم التوزيعات الاحتمالية المفصلة
321	أ- توزيع ذي الحدين
324	ب- توزيع بواسون
326	بعض أهم التوزيعات الاحتمالية المتصلة
326	أ- التوزيع المنتظم
327	ب- التوزيع الأسّي
327	ج- التوزيع الطبيعي
336	تقريب توزيع ذي الحدين إلى التوزيع الطبيعي
337	تقريب توزيع بواسون إلى التوزيع الطبيعي
339	الجدول

297	قائمة المراجع أو المصادر
301	الملحق: الاحتمالات والتوزيعات الاحتمالية
301	أ- الشجرة العشوائية
301	ب- فراغ البنية
301	ج- الحدث
302	د- الحدث المركب
302	هـ- الحدث المستحيل
302	و- الحدث المكمل
302	ز- الأحداث المتنافسة والأحداث غير المتنافسة
303	القواعد الأساسية لتحديد عدد عناصر فراغ البنية (S)
303	أ- القاعدة الأساسية للمدد
304	ب- قانون التبادل
304	ج- قانون التبادل مع وجود تكرار لبعض العناصر
304	د- قانون التوافيق
304	هـ- طريقة الشجرة البينية
305	و- البنيات المرتبة
305	1- المعالجة مع الإحلال (الإرجاع)
306	2- المعالجة بدون إحلال (بدون إرجاع)
306	3- المعالجة معاً
306	حساب الاحتمال لحدث معين
307	مسلّمات الاحتمالات
307	بعض قوانين حساب الاحتمالات لأكثر من حدث
307	أ- إذا كانت الأحداث متنافسة
307	ب- إذا كانت الأحداث مستقلة
308	ج- إذا كانت الأحداث غير متنافسة
309	د- إذا كانت الأحداث غير مستقلة
310	هـ- حساب الاحتمالات باستخدام الشجرة البينية
312	و- نظرية بير
313	المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية
314	أ- تعريف المتغير العشوائي
314	ب- أنواع المتغيرات العشوائية
315	1- المتغير العشوائي المنفصل (المقطع)
315	

## المقدمة

### Introduction

يسمع الكثير من الناس كلمة إدارة ويستعملونها، ولكن القليل منهم يدركون معنى هذا التعبير. وتعتبر كلمة إدارة بالنسبة إلى العديد من الناس أنها مرادفة لكلمة روتين في الدوائر الحكومية أو كلمة بيروقراطية. غير أن كلا التفسيرين خطأ، لأن الإدارة قد تتضمن الممننين معاً، ولكنهما يحد ذاتهما لا يشكلا أن أي جزء من مفهوم الإدارة. والواقع أن الإدارة تكمن وراء نجاح أي شركة أو عمل أو دولة أو جيش، كما أنها المسؤولة عن فشلها.

يعيش العالم اليوم عصر المعلومات وأنظمتها وتقنياتها والبحث عن أفضل استخدامات لها بأقل تكلفة لإنتاجها. ذلك لأن المعلومات السليمة تؤدي إلى قرارات سليمة، ومن ثم تؤثر إيجاباً على موارد المجتمعات وثرواتها، وبالتالي رفاهية أفرادها، كما تؤدي إلى كشف الإمكانيات الحقيقية لتقديم المجتمعات ونموها. ويعتبر النظام الإداري، في ظل الثورة التقنية التي نعيشها، أهم الأنظمة المنتجة للمعلومات المفيدة في اتخاذ قرارات اقتصادية تؤثر في رفاهية الأفراد والمجتمعات. ولعل بحوث العمليات تمثل أهم جزئية من النظام الإداري تختص بمساعدة المسؤولين باتخاذ القرارات، لا من حيث توفير المعلومات فحسب، وإنما أيضاً من حيث عرض بدائل النماذج والأساليب المساعدة في اتخاذ القرارات المعقدة متعددة القيود والمتغيرات.

وتعد الإدارة من أهم فروع المعرفة الإنسانية التي تهتم بإدارة المشاريع وتوليد وإنتاج بيانات ومعلومات ذات خصائص اقتصادية. وعادة ما تتعلق البيانات والمعلومات الإدارية بمواضيع أو ظواهر أو مظاهر اقتصادية، وتخدم ذوي العلاقة بها أو ذوي المصالح فيها، وخاصة في شأن اتخاذ قرارات منتجة لآثار اقتصادية على موارد الوحدات الاقتصادية والمجتمع.

وقد ازدادت أهمية أنظمة المعلومات بصفة عامة، وأنظمة المعلومات الإدارية بصفة خاصة في العصر الحديث نتيجة لعديد من العوامل والمتغيرات. فنحن نعيش عصر ثورة علمية في جميع المجالات لم يسبق لها مثيل في حياة البشرية. وقد أدت تلك الثورة، وما زالت، إلى تعقد الحاجات والمصالح وتشابكها، وتنوع وتغير سبل تحقيقها، وزيادة الحاجة إلى معلومات مفيدة وصالحة عن كل متغيراتها الهامة ومؤثراتها ونتائجها. وأدى

المعلومات والبيانات أصبحت خارج نطاق الإمكانيات المحدودة لأنظمة المعلومات التقليدية. ولم تهمل الثورة العلمية بدورها هذا الجانب الهام والجوهري ، بل بالعكس كان الاهتمام بتطوير أنظمة المعلومات ورفع كفاءاتها وزيادة سعتها وقدراتها هي من المحاور التي ارتكزت عليها الثورة في انتشارها واستمرارها. وبذلك فقد أصبحت أنظمة المعلومات الإلكترونية ذات القدرات والإمكانيات الهائلة هي المبدأ أيضا أنظمة المعلومات التقليدية، يدوية كانت أو آلية، هي استثناء غير مرغوب. كما أصبحت بنوك المعلومات بالنسبة للثورة العلمية هي ركيزة ضمان استمرارها، وبالنسبة للسياسة الاقتصادية هي مقومات زيادة احتمال سلامتها، وبالنسبة للخطط الاجتماعية والبيئية هي قوام تناسقها وكفاءتها في إنشاء ثمارها. وبالتالي فإن كنا نعيش عصر ثورة علمية فهو في الحقيقة وبالإضافة عصر أنظمة المعلومات الحديثة.

تحظى عملية اتخاذ القرارات الإدارية من خلال استخدام أسلوب علم الإدارة (بحوث العمليات) في الوقت الحاضر باهتمام كثير من الممارسين والمهنيين والممارسين للإدارة. فالمارسون للعلوم الإدارية يجدون في هذا المجال أسلوباً حديثاً ومطوراً في تحليل البيانات تحليلاً كميًا يسائر حركة الإدارة في الاتجاه العلمي. أما الممارسون للأعمال الإدارية فإن اهتمامهم باستخدام هذا الأسلوب الجديد في اتخاذ القرارات الإدارية أصبح يتزايد باستمرار. وذلك برغبتهم في الاستفادة من هذه العلوم الإدارية المتطورة، نظراً لما تعطيه من إمكانيات وقدرات أكبر في مجال التحليل وإنجازات لا يمكن التغاضي عنها في وقت أصبحت فيه الحاجة ماسة إلى هذه القدرات والإمكانيات. وعلى الرغم من هذا الأسلوب الكمي المتطور لا يصف في كثير من الحالات العوامل السلوكية المتعددة على وجه الدقة، وإنه يضع قواعد وإجراءات يمكن أن تفيد كثيراً في وضع الحلول المثلّية، خاصة في المشروعات الكبيرة والتي تتميز عملياتها الإدارية في عصرنا الحاضر وأصبحت معقدة ومتشابكة إلى الحد الذي يجعل من اتخاذ القرارات مشكلة تتطلب الكثير من البيانات النوعية والكمية، بالإضافة إلى استخدام الأدوات والأساليب القياسية التي تسهم في تحليل هذه البيانات بغية الوصول إلى الحلول المثلى.

وبذلك استقر الرأي على عنوان هذا الكتاب في العلوم الإدارية على أن يكون في مجال بحوث العمليات المتعلقة بعملية اتخاذ القرارات. تناول الكتاب بالدراسة والتحليل أهم الأساليب الكمية في الإدارة وكيفية استخدامها في معالجة المشاكل الإدارية والإنتاجية والصناعية وذلك من خلال ثمانية فصول رئيسية. ويستهدف هذا الكتاب في الفصل الأول الآتي: يتناول عرض وتوضيح موضوع أو مكانة بحوث العمليات بين فروع المعرفة الإدارية. ويؤكد على أن اختصاصها ينصب على المعلومات المستقبلية، ويعرض نماذج وأدوات اتخاذ القرارات، حيث تم التعرض فيه إلى مفهوم بحوث العمليات: كيف نشأت، وكيف تطورت، وما مدى أهميتها كأداة لاتخاذ القرارات، ثم ما المراحل التي

ذلك بالنسبة إلى آثار قوية وملحوظة على طريقة إدارة الموارد الاقتصادية المتاحة للوحدات الاقتصادية والمجتمع، واتخاذ القرارات السليمة في شأن تخصيصها وتوجيهها إلى أوجه الاستخدام البديلة، ومتابعة كفاءة استخدامها وفعالية استخدامها في تحقيق النتائج المرجوة من هذا الاستخدام.

فبالإضافة إلى الجوانب الفنية التقنية التي نتجت عن الثورة العلمية التي نعاشها، فهي أدت تغيرات بيئية واقتصادية واجتماعية وسياسية وتنظيمية وسلوكية هيكلية متشابكة، منتجة لآثار اقتصادية معقدة ومتداخلة. وقد أدى ذلك إلى تولد حاجات جديدة إلى بيانات معلومات ذات خصائص ونوعيات متعددة، لفهم هذه المتغيرات، ومثيراتها وآثارها والتحكم فيها وتوجيهها إلى ما يحقق المصالح الاقتصادية والاجتماعية العامة والخاصة.

فقد أدت التغيرات الاجتماعية والسياسية، على سبيل المثال، إلى ظهور الحاجة إلى مزيد من العناية بالمسؤولية الاجتماعية للوحدات والمنظمات الاقتصادية في شأن تنمية وحماية البيئة، وتنمية الموارد المادية والبشرية المتاحة، وغير ذلك من المسؤوليات ذات الطابع السياسي الاجتماعي، والمنتجة لآثار اقتصادية حقيقية. وقد أدى ذلك بالطبع، نظراً لطبيعة نطاق وعناصر المسؤوليات الجديدة، إلى قصور الاعتماد على البيانات والمعلومات الكمية ذات الطبيعة المالية في تخطيط وتوجيه الموارد للوفاء بها. وأصبحت البيانات والمعلومات غير الكمية أو الكمية التي لا تقبل القياس النقدي في صورة مالية من الأهمية بمكان بصدد وضع ما يلزم من سياسات وقيام ما يلزم من ضوابط للوفاء بهذه المسؤوليات.

كما أدت الثورة العلمية إلى تغيرات فنية وتقنية انعكست على شكل الوحدات والمنظمات الاقتصادية وهيكلتها، وعلاقات تداخلها، وتشابك مصالحها وأهدافها. فقد أدت هذه التغيرات إلى زيادة الحجم الاقتصادي للوحدات والمنظمات وتعدد أهدافها، وتنوع إنتاجها، وانتشار فروعها دولياً، وقيامها بهام سياسية واجتماعية بالإضافة إلى مهامها الاقتصادية. كل ذلك في ظل ظروف اقتصادية تدور مختلفة هيكلية، حيث يسود التضخم مع البطالة، والقمع الشديد في العمالة الفنية المدربة القادرة على التعامل والتفاعل مع فنون الإنتاج والتقنية الحديثة، مع استمرار الشكوى من التضخم السكاني.

وقد امتدت آثار الثورة العلمية إلى ميدان إنتاج وتوليد البيانات والمعلومات، حيث أصبحت كفاءة نظام المعلومات في إنتاج ما يلزم من بيانات ومعلومات، لحل المشاكل الاقتصادية والسياسية والاجتماعية والبيئية والفنية المتداخلة والمعقدة، هي المحدد الأساسي والرئيسي لفعالية السياسات والمخططات التي تم وضعها لهذا الغرض، في إنشاء النماذج المستهدفة والمرغوبة منها. وبذلك لم يصبح نظام المعلومات التقليدي بما يؤديه من مهام روتينية في إنتاج بيانات ومعلومات نمطية، ملائماً للوفاء بالاحتياجات الجديدة، كما أن السرعة المطلوبة والتوقيت المرغوب والتفاصيل الضرورية والنوعيات اللازمة في هذه

الاحتمالات والتوزيعات الاحتمالية لها لها من علاقة وثيقة بالنماذج الرياضية في مادة بحوث العمليات.

كذلك أقدم الشكر والاحترام إلى كل من ساهم في هذا العمل بطريقة مباشرة أو غير مباشرة والذين وضعوا للمسات الأخيرة على هذا الكتاب سواء بطابعته أو تجليده أو تصميمه أو إخراجيه على هذا النحو.

والله ولي التوفيق

المؤلف

د. سليمان محمد مرجان

2002

يجب المرور بها للوصول إلى القرار السليم وفقاً لهذا المنهج. الفصل الثاني توضح مبسط لعملية صناعة واتخاذ القرارات، وذلك من حيث المفاهيم الأساسية التي تقوم عليها هذه النظرية، ومراحل اتخاذ القرارات وفقاً لها، ثم الظروف المختلفة التي تتخذ فيها القرارات. ونظراً لأن المشروعات تعمل في بيئة ديناميكية متغيرة وغير مستقرة، إذا لا بد من دراسة نظرية الاحتمالات، قبل الخوض في الموضوعات الأخرى التي تشكل الاحتمالات أساساً لفهمها، لذلك فقد خصص الملحق في نهاية هذا الكتاب لدراسة هذه النظرية. الفصل الثالث عرض بطريقة مبسطة وشاملة وشمولية لبعض النماذج الرياضية التي أصبحت مألوفة في اتخاذ القرارات التخطيطية والرقابية بمدياتها القصيرة والطويلة. فقد تناول أسلوب البرمجة الخطية ونماذجها، وعرض لمفاهيمها ودلالاتها والأسس الرياضية والجبرية التي تستند إليها، والمفاهيم والدلالات المرتبطة بالمعلومات الناتجة عن استخدامها، وحدودها وتحليل مدى حساسيتها، والتي تمثل في كثيرها مرجعاً في البرمجة الخطية. ولقد تمت دراسة طريقة الرسم البياني، كأسلوب لحل مشاكل البرمجة الخطية. وأيضاً دراسة الطريقة الأكثر فعالية في حل مشاكل البرمجة الخطية وهي طريقة السيمبليكس وذلك من حيث خطواتها وتطبيقاتها المختلفة، وكذلك المواضيع المرتبطة بها، مثل تحليل الحساسية ومشكلة ازدواج. وتناول الفصل الرابع نموذج النقل واستخداماته في كيفية تحديد خطة النقل المثلى التي تحقق أدنى مستوى ممكن لتكاليف النقل الكلية. وفي الفصل الخامس عرض لشبكات الأعمال من حيث المفهوم والأساليب والاستخدامات مع التركيز على طريقة المسار الحرج وأسلوب 'بيرث' والتكلفة. وكذلك تم استعراض طريقة أطرون وأقصر مسار كادانين لتقرير كثير من السياسات والخطط التنفيذية. وناقش الفصل السادس مشاكل الرقابة على المخزون. وتناول الفصل السابع مشكلة صفوف الانتظار، وذلك من حيث مفاهيمها وأسسها ونماذجها وعلاقتها بالتكاليف. بينما في الفصل الثامن تمت مناقشة نظرية المباريات وعلاقتها بالمفاضلة بين القرارات الاستراتيجية المثلى.

ولعل هذا العرض، الهادف إلى توضيح دور العلوم الإدارية في المساهمة في اتخاذ القرارات الاقتصادية في ظل بيئة تتسم بالديناميكية في تقنياتها وسرعة حركتها وأهمية المعلومات فيها والحاجة الماسة إلى الأساليب والنماذج المساعدة لإمكانية معابقتها، قد حقق ببلده الصورة الغرض منه، وأهم من ذلك، لعله يفيد القارئ في ما يصور إليه، والله أسأل التوفيق والسداد.

وبعد الاستعراض الموجز لمحتويات هذا الكتاب، أود أن أضع هذا العمل بين أيدي الباحثين. كما إنني على استعداد كامل لتقبل أية اقتراحات سواء كانت هذه الاقتراحات بالسلبية أو الإيجابية وذلك من أجل التحسين والرفع من هذا العمل. كما أنتهز هذه الفرصة لأقدم الشكر إلى الأساتذة المراجعين لهذا العمل، والمصحح من الناحية اللغوية، كما أشكر د. إبراهيم مسعود عيسى لمساعدته في الجانب المتعلق بنظرية

## الفصل الأول

### مفهوم وأهمية علم بحوث العمليات

#### The Nature and Importance of Operations Research science

لقد ظهر هذا العلم حديثاً وأعطيت له عدة أسماء مثل بحوث العمليات Operations Research، أو الطرق الكمية في الإدارة Quantitative Methods أو علم الإدارة Management Science أو تحليل النظم Systems Analysis. وكل هذه الأسماء تطلق على هذا العلم بعد الحرب العالمية الثانية والمستخدم في المجالات المدنية. ويتم تحديد بعض التعاريف لهذا العلم على النحو التالي :

• بحوث العمليات هي إحدى الأدوات الكمية التي تساعد الإدارة في عملية اتخاذ القرارات.

• تدور بحوث العمليات حول استخدام التحليل الكمي لمساعدة الإدارة في اتخاذ القرارات مع الاعتماد بالدرجة الأولى على الأساليب الرياضية المتقدمة.

• بحوث العمليات هي عبارة عن استخدام الطرق والأساليب والأدوات العلمية لحل المشاكل التي تتعلق بالعمليات الخاصة بأي نظام يفرض تقديم الحل الأمثل لهذه المشاكل للقائمين على إدارة هذا النظام.

• بحوث العمليات هي مجموعة من الأدوات القياسية التي تمكن الإدارة من الوصول إلى قرارات أكثر دقة وموضوعية وذلك بتقديم الأساس الكمي لتحليل البيانات والمعلومات.

من خلال ذلك فإن علم بحوث العمليات هو ذلك العلم الذي يهتم بدراسة مشكلة معينة من المشاكل . ولقد توسع هذا العلم وانتشر ليشمل قطاعات مختلفة حيث يستخدم في مجالات الإنتاج والتصنيع وتوزيع المواد ونقلها ومتابعة المشاريع ولإيجاد المخطط الفعالة في تنفيذ المشروع بفترة زمنية أقل ويحدد أقل من العمال، ويوفر هذا العلم فوائد كثيرة لصانعي ومتخذي القرار ومن بين هذه الفوائد :

• طرح البدائل لحل مشكلة معينة لاتخاذ القرار المناسب، اعتماداً على العوامل والظروف المتوفرة.



إنتاج معدات وأجهزة دفاعية وفي أسرع وقت ممكن، بالإضافة إلى تحقيق أمل استخدام للأجهزة والمعدات المصنعة. ولقد كانت النتائج التي حققها هذا الفريق هامة، كان من ضمنها تحسين منظومة الرادار وتحسين الدفاع المدني وغيرها.

## 2 - استخدامه في أمريكا:

وكنتيجة للتقدم الهائل الذي أحرزته المجموعة البريطانية قامت إدارة الحرب الأمريكية بإجراء دراسات معاناة وذلك بتكوين فريق خاص لمعالجة بعض المشاكل المعقدة كمشكلة نقل المعدات والمواد المختلفة وتوزيعها على الوحدات العسكرية المنتشرة في مناطق مختلفة من العالم. ولقد كان كل من جايمس James B رئيس لجنة بحوث الدفاع القومي وفانيفار Vannevar B رئيس لجنة الأسلحة والمعدات الجديدة وراء استخدام بحوث العمليات، وهما اللذان شاهدا استخدام هذا الأسلوب في القوات البريطانية، أثناء إقامتهما في بريطانيا خلال فترة الحرب. وفي أكتوبر 1942 بعث الجنرال سباتز Spaatz القائد العام للقوة الجوية الثامنة برسالة إلى القادة العموميين للقوات الجوية، يوصي فيها بوجوب ضم مجموعات من العلماء لتحليل العمليات في وحداتهم. ومن خلال ذلك، شكلت القوة الجوية الثامنة الموجودة في بريطانيا أول فريق لهذا الغرض، ثم تبعها السلاح البحري الأمريكي. فشكل فريقين لهذا الغرض في المشروعين التاليين: معمل المعدات البحرية وترأس هذا الفريق أليسا J Elissa، الأسطول العاشر وترأس هذه المجموعة فيليب Philip M ونظراً للنجاح الذي تحقق في الولايات المتحدة الأمريكية بفضل استخدام علم بحوث العمليات، فقد واصل القادة العسكريون اهتمامهم بهذا العلم من خلال وكالة بحوث العمليات والتي تحولت في ما بعد إلى مؤسسة بحوث العمليات.

## 3 - استخدامه في كندا:

بدأت الحكومة الكندية باهتمام بعلم بحوث العمليات فشكلت فريقاً مهمته إنتاج بعض المعدات العسكرية وذلك من خلال الاستخدام الأمثل للموارد المتوفرة.

## التصنيف الثاني - استخدام علم بحوث العمليات في النواحي أو المجالات المدنية:

بدأ هذا التصنيف بعد انتهاء الحرب العالمية الثانية نتيجة للنجاح الذي تحقق في المجالات العسكرية، فتشجع رجال الأعمال، الذين كانوا - هم الآخرون - يبحثون عن حلول لمشاكلهم المتعلقة بالعمل على إدخال هذا العلم في إدارة المشاريع الاقتصادية.

ففي بريطانيا قام فريق من المهتمين بهذا المجال، بتكوين نادي بحوث العمليات سنة 1948 والذي أصبح اسمه في ما بعد جمعية بحوث العمليات للمملكة المتحدة، والتي بدأت في إصدار مجلة علمية ربح سنوية، ابتداء من سنة 1950، التي تعد أول مجلة في هذا المجال.

بينما في الولايات المتحدة الأمريكية تم تكوين جمعية بحوث العمليات الأمريكية، ومعهد الإدارة العلمية في سنة 1950. ولقد أصدرت هذه الجمعية مجلة بحوث العمليات

• إعطاء صورة تأثير العالم الخارجي على الاستراتيجية المبنية في تنفيذ خطة ما، حيث تؤثر الظروف الخارجية على نتيجة الاستراتيجيات التي تتخذها الإدارة، فمثلاً العرض والطلب هي من الظروف الخارجية التي تؤثر على إنتاج السلعة وتحقيق الأرباح من خلال إنتاجها.

• صياغة الأهداف والنتائج ومدى تأثير هذه الأهداف بكافة العوامل والمتغيرات رياضياً للوصول إلى كميات رقمية سهلة تحليلها.

ومن أهم المجالات التي يمكن استخدامها كالآتي:

1- في المجالات الإدارية، حيث يوفر هذا العلم المعلومات اللازمة لاتخاذ القرار المناسب في الوقت المناسب.

2- في مجال الإنتاج والتصنيع والبيع وأقل تكلفة ممكنة وأقل فاقد ممكن وأعلى ربح.

3- في مجال التوزيع والنقل وأقل تكلفة.

4- في مجالات التعيين وذلك باختيار الشخص المناسب للوظيفة الملائمة.

5- في مجالات التخطيط من خلال متابعة المشاريع وإعداد الخطط الزمنية لتنفيذ المشاريع المختلفة.

خلاصة القول، يمكن أن نقول بأن بحوث العمليات تستخدم في جميع المجالات إذا توفرت المعلومات والشروط التي تنطبق على أحد نماذج بحوث العمليات.

## التطور التاريخي لعلم بحوث العمليات:

يعتبر علم بحوث العمليات من العلوم الحديثة حيث ظهر هذا العلم سنة 1936 في بريطانيا، ولكن البداية الحقيقية لهذا العلم كانت خلال الحرب العالمية الثانية. هذا ويمكن تصنيف مراحل التطور لعلم بحوث العمليات كما يلي:

التصنيف الأول - استخدام علم بحوث العمليات في النواحي أو المجالات الحربية:

## 1 - استخدامه في بريطانيا:

وهذه المرحلة تبدأ منذ بداية الحرب العالمية الثانية، عندما بدأت إدارة الحرب البريطانية بتشكيل فريق من العلماء برئاسة البروفيسور بلاكيت Blackett P.M.S من جامعة ماننيستر Manchester لدراسة المشاكل الاستراتيجية والتكتيكية المتعلقة بالدفاعين الجوي والأرضي لبريطانيا. ولم تقتصر هذه الدراسات على الدفاع الجوي والأرضي فقط، بل امتدت الدراسات إلى البحرية البريطانية حيث أجريت دراسات تتعلق بالوقاية من الغواصات، وكذلك لدراسة حجم وترتيب قوافل السفن التجارية، ونوع وعدد السفن الحربية المرافقة، وشملت الدراسة تحديد أفضل الطرق لاستخدام قنابل الأعصاق في مهاجمة هذه الغواصات. وقد وضع هدف استخدام الموارد البشرية والمادية بشكل أمثل



2- استخدام أساليب معروفة وعامة وذلك بتطويرها لظروف المشكلة محل الدراسة .  
 ابتكار أسلوب خاص لمعالجة المشكلة إذا كانت من نوع فريد لا يصلح لها أي من الأساليب المعروفة. ومع استمرار التقدم والتطور في مجال بحوث العمليات، وجدت مجموعة من النماذج التي شاع استخدامها كأساليب قياسية لحل الكثير من المشاكل التي تواجه العديد من المشروعات القائمة، ومع زيادة دور هذه النماذج في معالجة الكثير من المشاكل الإدارية فقد تعددت مجالات استخدام هذه النماذج. وفي هذا العرض سوف نتناول بالدراسة المختصرة تصنيفاً لهذه النماذج المستخدمة وذلك في محاولة لتصنيف وتبويب الأساليب والأليات الكمية المستخدمة كخريطة تحدد المسار الذي سوف تتبعه في وصف أهم هذه النماذج، وسوف يتم عرض أوسع لبعض هذه النماذج في الفصول القادمة. ونزود في ما يلي نبذة مختصرة عن عدد من الأساليب المعروفة لبحوث العمليات ومجال استخدامها. هذا "تبويب يمكن عرضه في الجدول (1 - 1) :

جدول (1 - 1) تصنيف النماذج المستخدمة في بحوث العمليات

نماذج بحوث العمليات		
النماذج المحددة	النماذج المختلطة	النماذج الاحتمالية
Deterministic	Hybrid Models	Stochastic Models
الطرق التقليدية	البرمجة الدينامية	البرمجة الاحتمالية
Classical Methods	Linear Programming	Dynamic Program
	التوزيع والتخصيص	Stochastic Program
	Distribution and Assignment	Inventory Model
		Queuing Theory
طرق البحث	البرمجة العددية	تحليل ماركوف
Search Methodes	Integer Programming	Markov Analysis
البرمجة غير الخطية	البرمجة الشبكية	نظرية الألعاب والقرار
Nonlinear Programming	Networks Programming	Decision and Game Theory
	برمجة الأهداف الخطية	
	Goal programming	

يتضح من التبويب السابق أن النماذج المستخدمة في بحوث العمليات يمكن تصنيفها على أساس كونها محددة أو احتمالية، كما أن هناك نماذج أخرى يمكن اعتبارها خليطاً من النوعين السابقين. في النماذج المحددة يفترض دائماً أن قيم المتغيرات التي لا يمكن التحكم فيها وقيم المعاملات معروفة مسبقاً وثابتة وذلك على العكس من النماذج الاحتمالية ومعظم النماذج المحددة هي من النوع الذي يعتمد على الرموز الجبرية والذي

سنة 1952. كما أصدر المعهد أيضاً مجلة تخصصية في بحوث العمليات اسمها مجلة الإدارة العلمية وذلك في سنة 1953.

ولقد استخدم هذا العلم في المجالات المدنية نظراً لريادة الإنتاج في السلع ومن أجل إيجاد أفضل السبل لإنتاج السلع وبأقل تكلفة ممكنة وتوزيعها بصورة أمثل. والسؤال الذي يطرح نفسه هنا - ما هي استخدامات بحوث العمليات في الوقت الحالي؟ إن ظهور علم الحاسب الآلي في الفترة الحالية، والذي له الطاقة الكبيرة في إجراء العمليات الحسابية المختلفة وكذلك ظهور البرامج العلمية المتطورة للحساب والتي لها الأثر الواضح في دفع استخدام علم بحوث العمليات إلى آفاق واسعة في المجالات الإدارية وفي غيرها من العلوم، فبغير علم بحوث العمليات من الوسائل العلمية المساعدة في اتخاذ القرارات بأسلوب أكثر دقة وبعد عن المشوئية الناتجة عن أسلوب التجربة والخطأ. ولقد قدم وما تراكم يقدم خدمات هامة في حل المشاكل الإدارية واتخاذ القرارات فيما يتعلق بششاط الإنتاج والمشتريات والتحويل، وما إلى ذلك من الأنشطة الأخرى.

وكل تلك التقنيات والمعارف الحديثة والمتطورة أدت إلى ضرورة استخدام البرمجة الخطية Linear Programming التي أدت إلى معالجة العديد من المشاكل الهامة وعلى نطاق واسع، مثل مشاكل التخصيص وتحديد كمية الإنتاج المناسبة في عدد من المصانع لتنفيذ عدد من الأسواق أو المخازن. وكذلك استخدام أسلوب نظرية صفوف الانتظار Queuing Lines Theory لتحليل شبكات خطوط الاتصالات والتي وجدت مجالها في تحليل خطوط الإنتاج وتنظيم مراكز الخدمة اللازمة على الخط الإنتاجي أو في مجال الصيانة، وغيرها من المجالات الصناعية الأخرى. وقد أمكن باستخدام صفوف الانتظار إيجاد نظم للمخزون تتناسب مع ظروف كل دالة وتقلل من درجة عدم التأكد. ومن الأدوات العلمية التي أضيفت إلى مجموعة الأدوات العلمية المستخدمة لاتخاذ القرارات الإدارية المتعلقة بالمجالات الصناعية هي طريقة المسار الحرج Critical Path Method (CPM) ويرجع أصلها إلى طريقة معادلة قريبة الشبه منها هي طريقة تقييم ومراجعة المشروعات (PERT) Program Evaluation and Review Technique، ومن أهم المجالات التي تستخدم فيها طريقة بيرت PERT هي تخطيط ومراقبة المشروعات الإنسانية والصيانة والبحوث، وغيرها. ولم يقتصر استخدام الحاسبات الآلية في مجال بحوث العمليات الحسابية المعقدة، بل أمكن استخدام فكرة التعميل أو المحاكاة Simulation من الحاسب الآلي في تمثيل نظم إنتاجية كاملة ومحاولة اختبار أكثر من قرار لاختيار أفضل القرارات بسبب النتائج التي يظهرها الحاسب الآلي.

أهم أساليب وأدوات بحوث العمليات:

يأخذ استخدام علم بحوث العمليات في حل المشاكل الإدارية شكلين أساسيين<sup>1</sup>:

الرياضية أو الإحصائية المستخدمة في إعداد النموذج. فالطرق التقليدية تستخدم حساب التفاضل Differential Calculus للوصول إلى البدائل المثلى، كما تستخدم إجراءات وطرقاً أخرى كطريقة الفرع والحد Branch and Bound.

والبرمجة الاحتمالية تعتمد على الاحتمالات في بناء النماذج الخاصة بها، حيث تفيد الاحتمالات في تخفيض حالة عدم التأكد بالاستناد إلى كمية المعلومات المتوافرة، وبالتالي فإن نماذج البرمجة الاحتمالية تعالج المعاملات على أساس كونها متغيرات عشوائية، ولذلك فإن نماذج البرمجة الاحتمالية تمثل أحد جوانب البرمجة الرياضية التي لا تفترض التحديد المطلق.

أما نماذج صفوف الانتظار فهي تنفرد عن غيرها من النماذج من حيث مجال تطبيقاتها، فهي تحاول أساساً التنبؤ بخصائص العمليات لبعض الأنظمة التي تبدو فيها ظاهرة الانتظار واضحة، حيث تختص هذه النماذج لصفوف الانتظار بالوصول العشوائي للملاء إلى مراكز الخدمة ذات الطاقة المحدودة، حيث ترمي في الغالب إلى تحديد العدد الأمثل من الأتود أو مراكز الخدمة اللازمين لخدمة العملاء الذين يصلون عشوائياً ودون انتظام.

ونماذج التحليل الاحتمالية كتحليل «ماركوف» هي الأخرى تحاول التنبؤ بسلوك نظام معين على أساس البيانات والمعلومات المتوفرة عن سلوك هذا النظام في الماضي، فعلى سبيل المثال يمكن استخدام هذه النماذج للتنبؤ بأنظمة «المراكات المختلفة» من السلعة في السوق في الفترات الزمنية المقبلة وذلك من خلال استخدام حساب المصفوفات.

ونظرية القرارات تعتبر أيضاً أحد المداخل المدروسة في اتخاذ القرارات في ظل عدم التأكد التام، وهذه النظرية تشتمل على أسس وعناصر مستمدة من نظرية المنفعة ونظرية الاحتمالات، حيث تفيد هذه النظرية في تخفيض المخاطر التي قد يتعرض لها متخذ القرار عندما يكون في حالة عدم التأكد، وليس بإمكانه التنبؤ بالمستقبل على أساس التأكد التام.

أما نظرية المباريات فتربط غالباً بمجالات التقارب في المصالح بين المتنافسين، وتستخدم هذه النظرية الأساليب الرياضية والإحصائية للوصول إلى أفضل «استراتيجية» على أساس تعظيم المنافع والحد من الخسائر.

والبرمجة الديناميكية تعد أيضاً أسلوباً فريداً لمعالجة كثير من الظواهر والحالات التي تكون أبعادها والعلاقة بينها محددة أو احتمالية على حد سواء. وتقوم فكرة البرمجة الديناميكية على أساس المشكلة الأصلية إلى عدد من المشاكل الفرعية تعالج على أساس كونها جزءاً من الكل.

يرمي إلى تعظيم أو تقليل دالة هدف معينة، وذلك طبقاً لقيود ومحددات مفروضة. بالإضافة إلى ذلك يجب التفرقة بين نوعين من النماذج الرياضية وهي النماذج الرياضية الخطية وغير الخطية، حيث إن هذه التفرقة مبنية أساساً على نوع العلاقات الرياضية التي تحكم المتغيرات والقيود ودالة الهدف؛ فعلى سبيل المثال نجد أن نماذج البرمجة الخطية تفترض دائماً أن العلاقات والارتباطات التي تتضمنها القيود والدوال هي علاقات وارتباطات خطية في حين تفترض النماذج غير الخطية خلاف ذلك.

ونماذج التوزيع والتخصيص يمكن اعتبارها على أساس أنها حالات خاصة من النماذج الرياضية الخطية «البرمجة الخطية»، حيث تستخدم في معالجة مجموعة معينة وقسم خاص من الموارد المحددة، وهي تفترض أيضاً العلاقة الخطية. أما في ما يتعلق بالبرمجة العادية، فهي أسلوب لا يختلف عن البرمجة الخطية إلا في الطريقة المتبعة للحصول على الحل، حيث يتطلب أن تكون قيم متغيرات القرار أعداداً صحيحة أو قد تتضمن مشكلة البرمجة العادية عدداً من الحلول التي يجب أن تساوي فيها قيمة كل متغير صفراً أو واحداً. ومن أمثلة المشكلات التي يمكن استخدام البرمجة العادية في حلها: مشكلة اختيار موقع المشروع وتخطيط الإنتاج في ظل نظام الدفع الإنتاجي والتعامل مع القرارات التي تتضمن تكاليف ثابتة وتكاليف متغيرة والمفاضلة بين الموردتين والمفاضلة بين المشروعات الاستثمارية عند التخطيط المالي وفي اتخاذ قرارات التوسع في العطاات الإنتاجية.

ونماذج الشبكات البرمجة الشبكية، عبارة عن أسلوب خاص للبرمجة الخطية يحاول في الغالب تمثيل الظاهرة محل الدراسة في شكل شبكة تدفق يمكن من خلالها تحديد جميع العلاقات والارتباطات التي تنطوي عليها الظاهرة محل الدراسة. أما برمجة الأهداف فيمكن وصفها باختصار بأنها تلك النماذج التي تعالج الدوال المتعددة في ظل عدد من القيود الخطية، وغالباً ما يستخدم هذا الأسلوب في مجال تخطيط القوى البشرية وفي الحالات التي تتطلب معالجتها تحقيق مستويات مرفوعة لعدد من الأهداف المتضاربة.

عند هذا الحد يجب أن نشير إلى أن كل النماذج الخطية يمكن استخراج حلولها باستخدام الأسلوب الرقعي الذي يطلق عليه في كثير من الحالات أسلوب Iterative Procedure والذي يبدأ في العادة ببرنامج مبدئي، يتم تعديله ومراجعته طبقاً لقواعد وإجراءات محددة للوصول إلى برنامج ثان يمثل بديلاً آخر، حيث يتم تعديل هذا البرنامج الثاني للوصول إلى ثالث وهكذا. ومن أشهر الطرق المستخدمة في معالجة نماذج البرمجة الخطية ما يعرف بالطريقة العامة أو طريقة السيمبلكس The Simplex Method.

ونماذج البرمجة غير الخطية لا تفترض كما ذكرنا سلفاً العلاقات والارتباطات الخطية وهي مصنفة في التبريد السابق على أساس طرق وأساليب الحل بدلاً من البنية

### أسئلة : Questions

- س 1 - عزف بحوث العمليات . وما هي أهم المجالات التي يمكن أن تستخدم فيها بحوث العمليات؟
- س 2 - كيف تطور علم بحوث العمليات؟ وما هي التصنيفات المختلفة المتعلقة بهذا التطور؟ مع التركيز على استخدامات علم بحوث العمليات في الوقت الحالي .
- س 3 - أذكر أهم الأساليب والأدوات التي تستخدم في مجال بحوث العمليات ، مع إعطاء فكرة مبسطة عن أهم النماذج المستخدمة لهذا العلم .
- س 4 - حدد بعض الاستخدامات لعلم بحوث العمليات في مجال الإدارة .
- س 5 - ما هي العلاقة التي تربط بين بحوث العمليات والحاسوب؟
- س 6 - ما هي العلاقة التي تربط علم بحوث العمليات بالعلوم الأخرى؟

أما ما يعرف بالملعب مراجعة وتقييم المشروعات، فهو يختص بتخطيط وجدولة ومتابعة تنفيذ المشروعات التي لا تنصف بالتكرار، وذلك تحقيقاً للاستخدام الأمثل للموارد المتاحة، حيث يدفع هذا الأسلوب الإدارة إلى التفكير المسبق في تفاصيل تنظيم وجدولة المشروعات قبل التنفيذ ومن خلاله تكشف نقاط الاختناق وتعمل على خفض الوقت والتلفات مع الانتهاء من التنفيذ في الوقت المحدد.

**نماذج المخزون هي تلك النماذج التي تعالج مشاكل الرقابة على المخزون السليمي** باستخدام التحليل الكمي للوصول إلى تحديد السياسات المثلى للتخزين والتي تحقق أقل التكاليف المتوقعة، حيث ترمي هذه النماذج إلى الإجابة عن الاستفسارات المتعلقة بالحمج الأمثل للطلية والوقت الملائم لإعداد الطلبات.

**أما أسلوب المحاكاة فيساهم بدوره في تقادي إجراء التجارب على الواقع العملي** وذلك بتصميم نماذج تماثل هذا الواقع وإجراء التجارب عليها للتنبؤ بالناتج المحتملة لقرار معين قبل الالتزام به . ويستخدم أسلوب المحاكاة في حل مشكلات صفوف الانتظار وتحديد سياسة التخزين المثلى وتحديد السياسات السعوية واختيار المخطط الاستراتيجية.

**وبالإضافة إلى هذه النماذج يمكن أن نضيف نماذج أخرى مثل نماذج تحديد موقع المشروع Location Models حيث تساعد هذه النماذج في تحديد المواقع المثلى للمشروعات على النحو الذي يخفف تكاليف إنشاء المشروعات وتكاليف نقل المواد الخام للمشروع ونقل السلع من المنشأة إلى الأسواق لأدنى حد ممكن .** **أساليب التنبؤ الإحصائي Forecasting Model** وتستخدم هذه الأساليب بيانات تاريخية عن ظاهرة معينة وتحاول استخراج معادلة رياضية استناداً على هذه البيانات . يمكن استخدام هذه المعادلة للتنبؤ بسلوك الظاهرة وتستخدم هذه الأساليب في التنبؤ بالمبيعات والأسعار والإنتاج وحركة التجارة الخارجية والنمو السكاني وغيرها من الظواهر . **تحليل التبادل Break-Even Analysis** : ويستخدم هذا الأسلوب لتحليل العلاقات بين الإيرادات والتكاليف الثابتة والمتغيرة وحجم الإنتاج وذلك لتحديد مستويات الإنتاج التي يحقق عندها المشروع ربحاً أو خسارة أو التي يتوازن عندها مقدار الربح والخسارة، ويصلح استخدام هذا الأسلوب في حالة تحديد حجم الدفع الإنتاجية والمفاضلة بين التجهيزات الإنتاجية البدئية أو المفاضلة بين مواقع المشروعات.

يتضح مما سبق عرضه أن الطريقة العلمية باستخدام بحوث العمليات تقوم على بناء النماذج الرياضية، والتي بدورها تتيح لمتخذ القرار تبسيط الواقع بشكل يفهم الحصول على استنتاجات سليمة تركز على الأساس الكمي - تمهد الطريق لاتخاذ القرارات الإدارية السليمة - وهو أسلوب يحقق لمتخذ القرار فرصة إجراء التجارب قبل الإقدام على فعل معين قد ترتب عليه نتائج خطيرة.

والمكانية وبالوصفات التي يحتاج إليها مستعمل هذا المنتج. والمجال الثاني هو تحديد أنواع المدخلات اللازمة والمصنوع عليها ثم مجال تحويل هذه المدخلات وتحقيق الإنتاج المطلوب.

**القرار الأول المرتبط بصناعة القرار** هو دراسة السلامة التي يجب أن تنتج، فبهم مدير إدارة العمليات الإنتاجية بأن يحقق المواصفات التي يطلبها مستعمل السلامة (المستهلك الأخير). ويمكن استخدام كلمة فاعلية (Effectiveness) الإنتاج للتعبير عن مدى النجاح الذي يحققه مدير الإنتاج في الوصول بالمنتج إلى المواصفات التي يطلبها المستهلك الذي يحقق الإنتاج بوجها. ولذلك نجد أن هذا المدير يسعى للوصول إلى أعلى للكلفة التي يتحقق الإنتاج بوجها. وكما أن كفاءة (Efficiency) الإنتاج تعبر عن المستوى النسبي لدرجة من الكفاءة والفاعلية في المنتج الذي يقدم للمستهلك الأخير. ولكي يصل مدير إدارة العمليات الإنتاجية إلى هذا الهدف يبدأ بتحديد شكل وطبيعة المنتج أو الخصائص التي يجب أن يتميز بها حتى يلاقي إقبالاً لدى المستهلك الأخير والمتوقع.

**القرار الثاني المتعلق بصناعة القرار** هو تحديد أنواع المدخلات وتحويلها (الموارد المختلفة، الآلات والمعدات، المواد الأولية، وغيرها). بعد تحديد نوع وطبيعة السلامة ووضع المواصفات الفنية للإنتاج تتخذ إدارة العمليات الإنتاجية قرارات عمليات خلق المنتج ويتضمن ذلك تحديد أنواع المدخلات اللازمة وكيفية استخدامها.

**القرار الثالث المرتبط بصناعة القرار** هو تحديد مقومات خلق المنتج قبل الوصول إلى القرار الاقتصادي بمجموعة المدخلات التي تحقق أكبر كفاءة للمشروع يجب الانتهاء من اتخاذ القرار التقني (التكنولوجي) الذي يحدد البدائل الفنية التي يمكنها أداء العمل المطلوب.

**القرار الرابع المرتبط بصناعة القرار** هو تحديد الكمية المطلوبة من عناصر المدخلات. يتم اختيار المدخلات في مجموعات متكاملة، ويتخذ القرار التقني الذي يحدد البدائل الممكنة من الناحية الفنية قبل الشروع في اتخاذ القرار الاقتصادي.

**القرار الخامس** هو قرار تحديد القدرة الإنتاجية. ترتبط تكلفة الإنتاج لكل من البدائل المختلفة من مجموعات المدخلات بكمية الإنتاج. ومن المعروف أن التكلفة الكلية للإنتاج لا تتغير مباشرة مع تغير الكمية المنتجة.

**القرار الأخير** يتعلق بالتخطيط الزمني لمعاصر المدخلات. لا تنتهي وظيفة الإنتاج عند تحديد المنتج وتحديد أنواع المدخلات اللازمة للعملية الإنتاجية، بل تتضمن الوظيفة قراراً يتعلق بمعصر الزمن.

من خلال هذا المطلق يمكن أن نحدد الخطوات أو المراحل التي يجب أن يتتبعها متخذ القرار (المدير) عندما يرغب في اتخاذ قرار معين وهي:

## الفصل الثاني

### اتخاذ القرارات

#### Decision Making

#### المقدمة:

من المعروف بأن اتخاذ القرار هو جوهر لب العملية الإدارية في أي مشروع، والقرار في حد ذاته هو اختيار حل من بين عدة حلول لمشكلة معينة، أو من بين سبل العمل المتاحة لتحقيق هدف معين. وعملية اتخاذ القرار هي مجموعة متتالية من الخطوات والإجراءات التي تؤدي في نهايتها إلى اختيار أفضل الحلول البديلة، وإصدار الأوامر الخاصة بتنفيذها. فمن الناحية الإدارية والعملية أيضاً يوجد فرق بين اتخاذ القرار (Decision Taking) وصناعة القرار (Decision Making)، وبالتالي فإن المفهوم لكل منهما يجب أن يكون واضحاً. وصناعة القرار هي الآن محور البحث العلمي لإصدار قرارات رشيقة ناتجة عن الصناعة. بمعنى أن لصناعة القرار مدخلات تقود إلى مخرجات، وهذا يعني دراسة مدخلات صناعة القرار ليكون رشيماً وقابلاً للتنفيذ ومتشاماً مع ظروف الإنتاج السائدة. أما اتخاذ القرار فهو اختيار أحد البدائل من البدائل المتاحة في الخصوص بغية اتخاذ القرار الأمثل من حيث تحقيق الهدف والموضوعية. فيمكن تصور عمليات صناعة القرار على أنها كيفية الحصول على المدخلات مثل الموارد المادية والبشرية، والآلات والمعدات، المواد الخام والإمكانات الإنتاجية الآلية، والاستثمارات اللازمة لتشغيل النظام الإنتاجي بما يقف مع احتياجات هذا النظام، وتحويل هذه المدخلات إلى سلعة لها المواصفات والقيمة الزمنية والمكانية المقررة للمنتج. ولتحقيق الهدف الذي يسعى المشروع لتحقيقه وهو إنتاج السلعة بأكثر كفاءة ممكنة يتبني على إدارة المشروع الحصول على المدخلات التي تمكنه من تحقيق الإنتاج المطلوب بأقل تكلفة ممكنة.

يمكن الآن توضيح أهم القرارات التي تتخذها إدارة المشروع لصناعة القرار المتعلق بالعمليات الإنتاجية، والتي يمكن تحديدها في المجالات الرئيسية التي تعمل فيها هذه الإدارة، والتي تتعلق بتخطيط المنتج ويقصد به تحديد وتعرف المنتج ذي القيمة الزمنية

## 1- حالة التأكد التام:

وهي تتمثل في مجموعة من الظروف أو المتغيرات أو الحقائق التي تدفع متخذ القرار إلى الاعتماد التام بأن حالة ما من الحالات المتوقعة سوف تحدث وعلى وجه التأكد، ومن ثم فإن مهمة متخذ القرار في هذه الحالة هي اختيار البديل الذي يحقق أكبر عائد ممكن في ظل هذه الحالة المؤكد وقوعها.

## ب - حالة المخاطرة:

في كثير من الأحيان، يحدد متخذ القرار عدداً من الحالات أو الأحداث المتوقع حدوثها في المستقبل وكذلك احتمالات حدوث كل حالة من هذه الحالات أو الأحداث، وغالباً ما يتم تحديد احتمالات وقوع هذه الأحداث بأحد الأسلوبين:

أولاً: الاحتمالات الموضوعية - أي التي يتم حسابها على أساس تحليل البيانات التاريخية المتاحة أو المتوقعة من سنوات سابقة وعلى أساس أن ما حدث في الماضي قد يتم حدوثه في المستقبل.

ثانياً: الاحتمالات التقديرية - هذه يتم تحديدها على أساس الخبرة والتقدير الشخصي واستطلاع آراء الخبراء والمتخصصين. والمعايير المستخدمة في كلتا الحالتين تسمى بالاحتمالات التقديرية أو معيار ما يطلق عليه بالقيمة المتوقعة.

## ج - حالة عدم التأكد:

في هذه الحالة لا يمكن لمتخذ القرار أن يحدد احتمالات حدوث كل حالة من الحالات المتوقعة حتى ولو أمكنه تحديد تلك الحالات فعلاً. وبناء على ذلك لا يوجد معيار واحد متفق عليه كأساس لاتخاذ القرار، ولكن يتوقف الاختيار من بينها على شخصية متخذ القرار نفسه ودرجة استعداده لتحمل المخاطر.

ومن خلال مختلف الظروف لعملية اتخاذ القرار، فإن متخذ القرار عندما يرغب في تنفيذ هذا القرار فإنه يلجأ إلى استخدام العناصر البشرية لتنفيذه، وهذا يتوقف على نوعية القرار الذي يرغب باتخاذها، ففي بعض الأحيان يلجأ إلى استخدام الأدوات الكمية المختلفة (بحوث العمليات، الإحصاء، الرياضيات، الحاسب الآلي، نظم المعلومات الإدارية الخ) لمساعدته في عملية تنفيذ هذا القرار، وكذلك قبل تنفيذ هذا القرار عليه أن يقوم بدراسة ومتابعة التطورات البيئية المختلفة (المباشرة، وغير المباشرة)، والتي تؤثر على عملية اتخاذ القرار. الجدول التالي (1 - 2) يبين ذلك:

## 1- تحديد طبيعة المشكلة أو الهدف المراد تحقيقه:

تحديد طبيعة المشكلة يعتبر بمثابة تحديد الطريق الذي يجب أن يسير عليه متخذ القرار، وهو أمر في غاية الأهمية حيث يمكن إذا تعمقنا في جوانب المشكلة أن نكتشف نواحي من الأفضل أخذها بعين الاعتبار أثناء عملية اتخاذ القرار. ومع هذا فيجب أن نتعرف على الظروف المحيطة بالمسألة وذلك بسبب اختلاف الظروف التي ربما تؤدي إلى اختلاف القرار. وبناء على ذلك يمكن تقسيم المشاكل حسب التصنيف التالي:

### أ - مشاكل روتينية - وهي المشاكل التي تتكرر.

### ب - مشاكل حيوية - وهي المتعلقة بالخطط والسياسات المتبعة في المشروع.

### ج - مشاكل طارئة - هي التي تحدث دون وجود مؤشرات على حدوثها، ويعتمد علاجها على قدرة المدير في اتخاذ قراره بسرعة وحزم.

### 2- تحديد البدائل (وضع المشكلة في صورة بدائل):

ما نود التركيز عليه في هذه الخطوة هو أنه من النادر وجود بديل واحد لأية مشكلة (عمل)، لذلك لا بد من وجود عدة أدلة أو براهين لأي عمل ويتم تحديدها تحديداً قاطعاً عن طريق البحث العلمي المنظم.

### 3- تحليل وتقييم كل بديل:

يتم تحليل وتقييم البدائل بواسطة تحديد المتغيرات التي يمكن قياسها بسهولة كالإيرادات، التكاليف، الزمن، درجة الصعوبة وغيرها، ومحاولة وضع التخمين الدقيق لحد ما عن العناصر الأخرى، مثلاً العلاقات المعالية أو الظروف السياسية التي لا يمكن وضعها بصورة كمية.

### 4 - إختيار البديل الأمثل من البدائل وإصدار القرار:

من الطبيعي أنه يتم إختيار البديل الأمثل من خلال ثلاثة منطقتين وهي: الخبرة، التجربة، البحث والتفصيل. والمطلق الأخير هو الأسلوب الأكثر استخداماً وتأثيراً لتحليل المشكلة واكتشاف العلاقات بين المتغيرات المهمة وكذلك القيود التي لها علاقة بالهدف الذي تسعى إلى تحقيقه.

### 5 - تنفيذ القرار ومابعده وتقييمه:

حيث نجد أنه لا تنتهي مهمة متخذ القرار عند تنفيذه بل تتعدى إلى متابعة نتائج التنفيذ وذلك لتعرف على مدى نجاح البديل المختار أو الأمثل في علاج المشكلة أو تحقيق الهدف المرغوب. وما تجدر الإشارة إليه في هذا الصدد هو أنه يمكن تقسيم الحالات (المناخ أو الظروف) التي تتخذ فيها مختلف أنواع القرارات إلى ثلاث حالات أساسية وهي:



(1) النماذج التي يمكن الاستعانة بها في اتخاذ القرارات المتعلقة بعلم الإدارة. والمثال (1) بين بعض النماذج المستخدمة لحل بعض المشاكل الإدارية بصورة عامة :

نفرض أن الشركة العامة للنقل البحري ترغب في شراء سفن جديدة، وذلك لغرض توسيع وتحسين مجال خدماتها. ولكن هذه الشركة لم تقرر بعد ما هي النوعية اللازمة من هذه السفن التي يجب شراؤها. وبعد دراسة السوق العالمي، تبين لها بأنه يوجد ثلاثة أنواع من السفن التي يمكن الاختيار من بينها والتي تتلائم مع متطلبات هذه الشركة (وجود قرارات بديلة لعملية المقاضلة) وهي :

البديل الأول - شراء سفن من الحجم الصغير (S)  
البديل الثاني - شراء سفن من الحجم المتوسط (M)  
البديل الثالث - شراء سفن من الحجم الكبير (L)  
ولقد كانت توقعات إدارة الشركة بالنسبة لبيعات السنة القادمة من التداكر (الأحداث المستقبلية) وهي كالتالي :

المجموعة الأولى (A1) - (0 - 100000 دينار)  
المجموعة الثانية (A2) - (100000 - 180000 دينار)  
المجموعة الثالثة (A3) - (180000 - 300000 دينار)  
المجموعة الرابعة (A4) - (أكثر من 300000 دينار)

ولقد قامت إدارة الشركة بتحديد الأرباح المتوقعة وهي مبينة في الجدول (2 - 2) :

جدول (2 - 2) الأرباح المتوقعة

القرارات البديلة		الأحداث أو النتائج المتوقعة	
	M		S
LA1	MA1	SA1	A1 (0-100000)
LA2	MA2	SA2	A2 (100000-180000)
LA3	MA3	SA3	A3 (180000-300000)
LA4	MA4	SA4	A4 (300000 -)

من الجدول (2 - 2) يتبين أن الرموز الموجودة على يمين الجدول (SA1, MA1, LA4) تمثل الأرباح التي يمكن تحقيقها، نتيجة لاتخاذ قرار من القرارات المذكورة والمعتبرة يحدث من الأحداث المتوقعة، مثلاً (SA1) توضح الربح الذي يمكن تحقيقه، وذلك إذا اشترت الشركة سفناً من النوع الصغير (S)، وكان حجم المبيعات في المجموعة الأولى (0 - 100000) دينار. كما أن (LA4) تعني الربح الذي سيحقق، وذلك

جدول (2 - 1)  
الإدارة وعمليات اتخاذ القرار

البيئة		الأدوات الكمية	الموارد البشرية
البيئة الخارجية	البيئة الداخلية	(الحاسب الآلي، علم الإدارة، أو بحوث العمليات، الإحصاء، نظم المعلومات الإدارية، الرياضيات الداجية والفنانية والمرونة وغيرها)	(العلوم السلوكية، إدارة الأفراد، أو إدارة الموارد البشرية، السلوك التنظيمي وغيرها)
- العوامل السياسية	- الوظائف الإدارية	- العلاقات الإدارية	
- العوامل الاقتصادية	- الإجماعات	- السياسات الداخلية	
- العوامل الاجتماعية والثقافية	- الفروع والفروع	- الفروع والفروع	
- العوامل الفنية	- غيرها	- وغيرها	

إن الجدول (2 - 1) يشير إلى الحقائق التالية وهي :

1- هناك حاجة ماسة ومتزايدة لاستخدام علم الإدارة والإحصاء والأدوات التحليلية الكمية كأدوات مساعدة لمتخذ القرار حيث يمكن للمدير الاستفادة من التسهيلات المتاحة في علم الإدارة والإحصاء والأساليب الرياضية، وخاصة بعد ظهور الحاسبات الآلية وظهور برامج كمبيوتر جاهرة للاستخدام دون الحاجة إلى الإلمام بالبرامج الفنية المتخصصة في مجال تشغيل الحاسبات أو إعداد البرامج.

2- العلوم السلوكية - لقد أصبحت تحل أهمية خاصة في معالجة العديد من المشاكل الإدارية ومن ثم أصبح مطلوباً من المدير الإلمام بمبادئ هذا العلم وذلك لأن المعرفة المتحصل عليها من هذه العلوم تمكن من مساعدته في إيجاد الحلول المناسبة لعدم لاحتياجه من المشاكل الإنتاجية والإدارية.

3- إن معظم القرارات الإدارية ترتبط بشكل مباشر أو غير مباشر بمشاكل إنسانية للأفراد، ولهذا فإن الأساليب الرياضية بمفرداتها لا تمثل أساساً صالحاً لاتخاذ القرارات ما لم تكن مدعومة بالخبرة والتقدير المنطقي للمدير.

4- القدرة على التنبؤ والمعرفة الناتجة بالمؤثرات البيئية المختلفة.

وبناء على ذلك يستطيع متخذ القرار أن يطبق الأسلوب الكمي في اتخاذ القرار على الأمور التي يمكن تطبيقها. ولعله من البديهي أنه لا يمكننا وضع قائمة شاملة بالأساليب التي تصلح لمعالجة كل المشاكل المتعلقة بالإنتاج والعمليات. ولكن مع استمرار التقدم والتطور في مجال علم الإدارة والعلوم الأخرى وجدت مجموعة من النماذج التي شاع استخدامها كأساليب قياسية لحل الكثير من المشاكل التي تواجه العديد من المشروعات القائمة، ومع زيادة دور هذه النماذج في معالجة الكثير من المشاكل الإدارية فقد تعددت مجالات استخدام هذه النماذج. وحلاصة القول، يمكن أن نكتفي بالإشارة إلى بعض

- 4- ويكون جدول الخسائر بعد إجراء العمليات الحسابية اللازمة لذلك في الجدول (2)، ملخصة في الجدول (2-5):

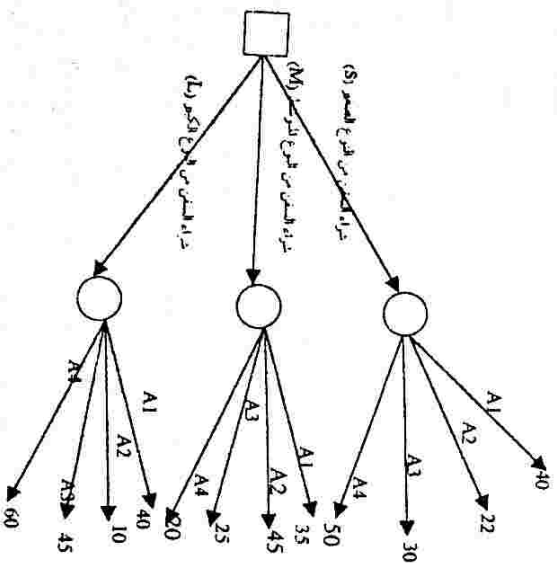
جدول (2-5) ملخص للخسائر

نوع السفينة		المبيعات			
	A1	A2	A3	A4	
S	0	23,000	15,000	10,000	
M	5,000	0	20,000	40,000	
L	80,000	55,000	0	0	

شجرة القرارات Decision Tree:

تستخدم شجرة القرارات في تحليل المشاكل المعقدة وخاصة عندما تكون المشكلة متعلقة بعنصر المخاطرة وعدم التأكد. وتفيد شجرة القرارات عند المغاضلة بين البدائل الاستثمارية وعند شراء المعدات وإجراء التعاقدات. فمن خلال المعلومات الموجودة في المثال السابق (1) يمكن تحليل البدائل المختلفة كما هي مبينة في شجرة القرارات المبينة في الشكل (2-1):

شكل (2-1) شجرة القرارات



إذا اشترت الشركة سفناً من النوع الكبير (L)، وكان حجم المبيعات في المجموعة الرابعة (أكثر من 300000 دينار. نفرض أن هذه الشركة احتسبت قيمة الأرباح، والتي كانت مبينة في الجدول (2-3):

جدول (2-3) الأرباح

نوع السفينة		المبيعات			
	A1	A2	A3	A4	
S	40,000	22,000	30,000	50,000	
M	35,000	45,000	25,000	20,000	
L	-40,000	-10,000	45,000	60,000	

نلاحظ من الجدول (2-3) بأن القيم السالبة (40000 -) و (10000 -) تمثل الخسارة. فمثلاً إذا قررت الشركة شراء السفن من النوع الكبير (L)، وفي نفس الوقت كان حجم المبيعات في المجموعة الأولى (0 - 100000 دينار، فإن الخسارة التي سوف تنكبها هذه الشركة هي (40000) دينار. وبالمثل بالنسبة للرقم الثاني، بمعنى أنه إذا قررت شراء سفن من النوع الكبير (L)، وفي نفس الوقت كان حجم المبيعات في المجموعة الثانية (180000 - 100000) دينار، فإن الخسارة ستكون عشرة آلاف دينار.

جدول الخسائر

من خلال المعلومات السابقة يمكن بناء جدول يهتم بالخسائر، وذلك عن طريق تحديد أكبر قيمة في كل عمود من الأعمدة المكونة لجدول الأرباح، ثم نقوم بطرح بقية القيم من تلك القيمة الكبيرة، ويكون الفرق ممثلاً لما يسمى بخسارة الفرصة الضائعة (Opportunity Loss). وحساب هذه الخسائر مبين في الجدول (2-4).

جدول (2-4) الخسائر

العمود الأول	العمود الثاني	العمود الثالث	العمود الرابع
40,000-40,000 = 0	45,000-22,000 = 23,000	45,000-30,000 = 15,000	60,000-50,000 = 10,000
40,000-35,000 = 5000	45,000-45,000 = 0	45,000-25,000 = 20,000	60,000-20,000 = 40,000
40,000-(-40,000) = 80,000	45,000-(-10,000) = 55,000	45,000-45,000 = 0	60,000-60,000 = 0



على تعظيم أقل ربح يمكن تحقيقه، ولذلك، فإن البعض يسميها (طريقة القرار المتشائم). وفي المثال السابق نجد أن أكبر عائد من بين أقل الأرباح المتربية على مختلف القرارات هو الربح (22000) دينار، والذي يعني أن القرار الذي يجب اتخاذه هو شراء السفن من النوع الصغير (S).

ج - طريقة تقليل أكبر خسارة يمكن تكديها Minimax:

هناك خطورتان يجب أن ننبههما وهما:

- 1 - من جدول الخسائر، يتم تحديد أكبر خسارة يمكن تكديها من كل القرارات البدئية.
- 2 - يتم اختيار أقل قيمة من بين القيم التي تم تحديدها في الخطوة (1)، ويجب اتخاذ القرار الذي يحقق هذه القيمة. وينطبق هذه الطريقة، فإن الخسارة هي (23000) دينار، والتي تعني أن القرار الذي يجب اتخاذه هو شراء السفن من النوع المتوسط (M). وتعرف هذه الطريقة بطريقة (الأسف أو الندم).

ثالثاً - إتخاذ القرارات في حالة للمخاطرة أو المجازاة:

تحت هذه الظروف، فإن متخذ القرار يكون بحاجة لمعلومات عن احتمالات وقوع الأحداث المختلفة التي تلي الاختيارات المختلفة للقرارات. وهذه الاحتمالات قد يتم الحصول عليها من المسجلات الماضية للمشروع، وقد تكون مجرد تقدير شخصي لمتخذ القرار نفسه، وفي هذه الحالة، يمكن لمتخذ القرار اللجوء إلى إحدى الطرق التالية عندما يرغب باتخاذ قرار معين تحت هذه الظروف. والطرق هي:

1 - طريقة القيمة المتوقعة The Expected Value Method:

الإجراءات التي يجب اتباعها عند استخدام هذه الطريقة هي:

- 1 - إحصاء الربح المتوقع من قرار بديل، وذلك بوزن أو تقييم كل ربح من الأرباح الموزعة في الصف الذي يشير إلى القرار، وذلك بضررها في احتمالات وقوع الأحداث المختلفة، ثم تجميع القيم الناتجة.

2 - تم باختيار القرار الذي يعطي أكبر عائد متوقع فإذا افترضنا مثلاً أن احتمالات بيع الأحجام المختلفة السابقة من المبيعات كانت كالآتي:

إحتمال أن يكون حجم المبيعات (0 - 100000) = 15%
إحتمال أن يكون حجم المبيعات (100000 - 180000) = 30%
إحتمال أن يكون حجم المبيعات (180000 - 300000) = 25%
إحتمال أن يكون حجم المبيعات (300000 - 180000) = 10%

وترغب هذه الشركة تحديد أعلى الأرباح المتوقعة، ومن ثم تحديد القرار الذي

لقد ناقشنا سابقاً الظروف المختلفة التي تتخذ فيها القرارات، وذكرنا بأنها تنقسم إلى ثلاثة ظروف مختلفة وهي:

أولاً - إتخاذ القرارات تحت حالة التاكيد التام Making Decision Under Certainty:

في هذه الحالة يكون متخذ القرار متأكداً من أن حدثاً معيناً سوف يقع، أي أنه يكون على علم تام بالمستقبل. وفي هذه الحالة يكون من السهل على متخذ القرار تحديد القرار البديل الذي سيخذه. فإذا افترضنا مثلاً أن إدارة الشركة العامة للنقل البحري متأكدة من أن حجم المبيعات سيكون (0 - 100000) دينار، فإن القرار سوف يكون شراء سفينة من نوع صغير (S)، لأن ذلك سيحقق أعلى عائد، وهو (40000) دينار. أما إذا كانت الإدارة متأكدة من أن حجم المبيعات، سيكون (180000 - 300000) دينار، فإن القرار سيكون شراء سفينة من النوع الكبير (L)، وذلك لأن هذا القرار سيحقق أيضاً أعلى ربح، وهو (45000) دينار. لاحظ أيضاً أن هذين القرارين يحققان أقل الخسائر (انظر جدول الخسائر).

ثانياً - إتخاذ القرارات تحت حالة عدم التاكيد Making Decisions Under Uncertainty:

في هذه الحالة، متخذ القرار يكون غير متأكد من أن هناك حدثاً معيناً سوف يحدث، وإضافة إلى ذلك، فإنه لا توجد معلومات وافية تمكن من تحديد احتمالات وقوع الأحداث الممكنة، وفي هذه الحالة، فإن متخذ القرار يمكنه اللجوء إلى إحدى الطرق التالية عندما يرغب إتخاذ قرار معين يتعلق بهذه الظروف.

1 - طريقة تعظيم أكبر عائد يمكن تحقيقه Maximax:

متخذ القرار يجب عليه أن يستخدم الخطوتين التاليتين وهما:

- 1 - من جدول الأرباح، يتم تحديد أكبر ربح يمكن تحقيقه من كل القرارات البدئية.
- 2 - يتم اختيار أكبر قيمة من بين القيم التي تم تحديدها في الخطوة (1)، ويكون القرار الذي يحقق هذه القيمة هو القرار الذي يجب اتخاذه. نستنتج أن هذه الطريقة تركز على تعظيم أكبر ربح يمكن تحقيقه، ولذلك تسمى في بعض الأحيان (طريقة القرار المتفائل). ووفقاً لهذه الطريقة، فإن أكبر ربح يمكن تحقيقه في المعال السابق هو (60000) دينار، والذي يتحقق عن طريق شراء السفن من النوع الكبير (L).

ب - طريقة تعظيم أقل عائد يمكن تحقيقه Maximin:

يستخدم القرار أيضاً خطوتين اثنتين وهما:

- 1 - من جدول الأرباح، يتم تحديد أقل ربح يمكن تحقيقه من كل القرارات البدئية.
- 2 - يتم اختيار أكبر قيمة من بين القيم التي تم تحديدها في الخطوة (1)، ويجب إتخاذ القرار الذي يحقق هذه القيمة. وهكذا، فإن هذه الطريقة هي عكس الأولى، تركز

ويمكن أيضاً الوصول إلى نفس القرار السابق، إذا أخذنا جدول الخسائر السابق،  
فتكون النتائج كالآتي:

الخسارة عند شراء سفينة من النوع الصغير (S):

$$0 + (15\%) 23000 + (30\%) 15000 + (25\%) 10000 + (10\%) 11.65 = 11.65 \text{ ديناراً}$$

الخسارة عند شراء سفينة من النوع المتوسط (M):

$$5000 + (15\%) 0 + (30\%) 20000 + (25\%) 40000 + (10\%) 9.75 = 9.75 \text{ ديناراً}$$

الخسارة عند شراء سفينة من النوع الكبير (L):

$$80000 + (15\%) 0 + (30\%) 55000 + (25\%) 0 + (10\%) 28.5 = 28.5 \text{ ديناراً}$$

من خلال هذه النتائج، نجد أن أقل الخسائر تتحقق بشراء السفينة من النوع المتوسط (M)، وهي نفس النتيجة السابقة، ويمكن جمع الأرباح والخسائر المتوقعة في جدول واحد، وذلك من أجل المقارنة كما هو في الجدول (2-6):

جدول (2-6) الأرباح والخسائر المتوقعة من المعال (1)

شراء سفينة من النوع الكبير (L)	شراء سفينة من النوع المتوسط (M)	شراء سفينة من النوع الصغير (S)	شراء سفينة من النوع
8250	27000	25100	الأرباح المتوقعة
28.5	9.75	11.65	الخسائر المتوقعة

القيمة المتوقعة للمعلومات الكاملة Expected Value of Perfect Information :

لو فرضنا أنه في بعض الحالات، كانت هناك إمكانية الحصول على معلومات مؤكدة من أحد المصادر بخصم من أي الأحداث سوف تقع، ونرغب في تحديد قيمة هذه المعلومات الكاملة، فإذا كانت احتمالات الأرباح الأربعة للمبيعات هي كما سبق: 15% للمحجم الأول، 30% للمحجم الثاني، 25% للمحجم الثالث، 10% للمحجم الرابع. فإذا فرضنا أن هذه الأرباح تبين الواقع العملي فعلاً، فإن القرارات التي يجب اتخاذها في هذه الحالات الأربع هي:

إذا كان حجم المبيعات (0 - 100000) دينار، فإن نوع السفينة المشتراة هي من الحجم الصغير (S)، والمائد 40000 دينار.

إذا كان حجم المبيعات (100000 - 180000) دينار، فإن نوع السفينة المشتراة هو من الحجم المتوسط (M)، والمائد 45000 دينار.

إذا كان حجم المبيعات (180000 - 300000) دينار، فإن نوع السفينة المشتراة هو من الحجم الكبير (L)، والمائد 45000 دينار.

يجب اتخاذ، فإن ذلك يتم تحديده كما يلي:

يكون الربح عند شراء السفينة من النوع الصغير (S):

$$40000 + (15\%) 22000 + (30\%) 30000 + (25\%) 50000 + (10\%) 25100 = 25100 \text{ دينار}$$

يكون الربح عند شراء السفينة من النوع المتوسط (M):

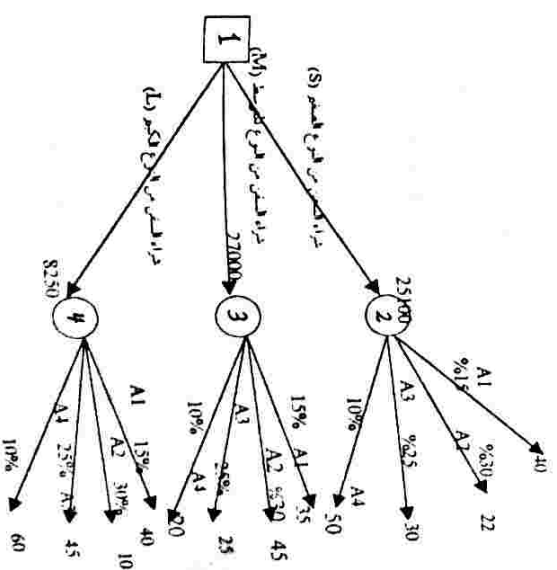
$$35000 + (15\%) 45000 + (30\%) 25000 + (25\%) 20000 + (10\%) 27000 = 27000 \text{ دينار}$$

يكون الربح عند شراء السفينة من النوع المتوسط (M):

$$82500 + (15\%) 40000 + (30\%) 10000 + (25\%) 45000 + (10\%) 60000 = 82500 \text{ ديناراً}$$

من خلال هذه النتائج، فإن أكبر قيمة متوقعة هي (27000) دينار، والتي تتحقق عندما يكون القرار هو شراء سفينة من النوع المتوسط (M)، ويمكن توضيح هذه المعلومات مباشرة في الشكل (2-2)، على شجرة القرارات كما يلي:

شكل (2-2) شجرة القرارات مرتقة بالاحتمالات لكل قرار



الربح عند شراء السفينة من النوع الكبير (L):

$$10 = 40000 - (25\%) + 45000 + (25\%) + 60000 + (25\%) = 10$$

دانير.

من خلال هذه النتائج، نجد أن القرار الذي يجب اتخاذه هو شراء السفينة من النوع الصغير (S)، لأن هذا القرار يحقق أعلى ربح وقدره (35.500) ديناراً.

### III - طريقة أكبر احتمال The Maximum Likelihood Method :

يمكن استخدام هذه الطريقة عن طريق اختيار الحدث الذي يكون احتمال وقوعه أكبر ما يمكن، ثم يتم اختيار التوزيع بين هذا الحدث والقرار الذي يعطي أكبر ربح ممكن. ففي المثال السابق نجد أن الحدث الذي يحمل أكبر احتمال وقوع هو الحدث (A2)، والذي يعني أن يكون حجم المبيعات (100000 - 180000) دينار. وعند النظر إلى الأرباح الموجودة في العمود الذي يقع تحت (A2) - انظر الجدول (3-2) - نلاحظ أن أكبر ربح هو 45.000 دينار، حيث إن هذا الربح يقابل (M) فهذا يعني أن القرار الذي يجب اتخاذه، هو شراء السفينة من النوع (M).

تحتل عملية اتخاذ القرارات الإدارية من خلال استخدام أسلوب علم الإدارة (بحوث العمليات) في الوقت الحاضر باهتمام كبير من الممارسين والمهتمين بالممارسين للإدارة. فالدارسون للمعلوم الإدارية يجدون في هذا المجال أسلوباً حديثاً ومتطوراً في تحليل البيانات تحليلًا كميًا يسائر حركة الإدارة في الاتجاه العلمي.

أما الممارسون للأعمال الإدارية فإن اهتمامهم باستخدام هذا الأسلوب الجديد في اتخاذ القرارات الإدارية أصبح يتزايد باستمرار. وذلك برغبتهم في الاستفادة من هذه العلوم المتطورة، نظرًا لما يعطيه من إمكانيات وقدرات أكبر في مجال التحليل واتخاذ القرارات لا يمكن التغاضي عنها في وقت أصبحت فيه الحاجة ماسة إلى هذه القدرات والإمكانيات. وعلى الرغم من أن هذا الأسلوب الكمي المتطور لا يصف في كثير من الحالات العوامل السلوكية المتعددة على وجه الدقة، ولأنه يضع قواعد وإجراءات يمكن أن تفيد كثيراً في وضع الحلول المثلى، خاصة في المشروعات الكبيرة والتي تتميز عملياتها الإدارية في عصرنا الحاضر بالتعقد والتشابك إلى الحد الذي يجعل من اتخاذ القرارات مشكلة تتطلب الكثير من البيانات النوعية والكمية. بالإضافة إلى استخدام الأدوات والأساليب القياسية التي تسهم في تحليل هذه البيانات بغية الوصول إلى الحلول المثلى.

ومن الطبيعي الآن إمكانية تحديد المدخل الكمي في اتخاذ القرارات من خلال استخدام نماذج بحوث العمليات. وهذه الخطوات يمكن تصنيفها على النحو التالي:

أولاً - الشعور بضرورة اتخاذ موقف معين تجاه ظاهرة تحتاج إلى تفسير (الإدراك بضرورة التحرك في اتجاه معين لتصحيح وضع قائم).

إذا كان حجم المبيعات (أكثر من 300000) دينار، فإن نوع السفينة المشتراة هو من الحجم الكبير (L) والمائد 60000 دينار.

وبالتالي يكون الربح المتوقع عند استخدام مصدر المعلومات الكاملة هو :

$$36.750 = 40000 + (15\%) + 45000 + (30\%) + 45000 + (25\%) + 60000 + (10\%) = 36.750$$

ديناراً.

ويبدون استخدام هذه المعلومات الكاملة، فإن الربح المتوقع هو فقط 27000 دينار (انظر شكل 2-1)، ومن ثم، فإن القيمة المتوقعة للمعلومات الكاملة تساوي (27.000 - 36.750) = 9750 ديناراً. وبشكل عام، يمكن تحديد الخطوات التي تتحدد بها القيمة المتوقعة للمعلومات الكاملة كالآتي:

- 1- يتم تحديد أعلى ربح من كل حدث، على اعتبار أن هناك علماً مؤكداً بأن ذلك الحدث سوف يقع.
- 2- يتم وزن كل ربح من هذه الموائد، وذلك بفرعها في احتمالات وقوع الأحداث.
- 3- تجميع القيم المحسوبة في الفقرة (2)، وتسمى القيمة الناتجة الربح المتوقع في وجود معلومات كاملة.

4- يتم تحديد القيمة المتوقعة للمعلومات الكاملة، وذلك بطرح القيمة المتوقعة في حالة عدم وجود معلومات كاملة، والمحسوبة في الفقرة (3).

وعلى متخذ القرار أن يقارن بين تكلفة الحصول على هذه المعلومات المؤكدة، وما يضيفه وجودها من موائد، ومن ثم يقرر استخدامها من عدمه.

### II - طريقة السبب غير الكافي Insufficient Reason Method :

في وقوع الأحداث، مثلاً، قد لا تتوفر إدارة الشركة العامة للتقل البحري معلومات عن احتمالات بيع الأحجام المذكورة من المبيعات. ونظراً لأن هناك أربعة أحجام مختلفة من المبيعات، فإن متخذ القرار، ويتابع هذه الطريقة، يمكنه اعتبار أن احتمال بيع أي حجم من هذه الأحجام هو 25%، ويتم حساب القيمة وفقاً لهذه الطريقة كما يلي:

$$40000 + (25\%) + 22000 + (25\%) + 30000 + (25\%) + 50000 + (25\%) = 35.5$$

ديناراً.

الربح عند شراء السفينة من النوع المتوسط (M):

$$31.25 = 35000 + (25\%) + 45000 + (25\%) + 25000 + (25\%) + 20000 + (25\%) = 31.25$$

ديناراً.

موازنة المشروع هو أحد الأمثلة حيث إنه يبين الظروف المالية في وقت محدد مثل انتهاء الأعمال للسنة في نهاية السنة المالية.

## 2- النماذج الحركية (الديناميكية) Dynamic Model

ويمثل هذا النموذج الكينونة التي يعد لها النموذج خلال فترة زمنية معينة مثلاً (سنة). وعلى أية حال فإن كلف حساب العائد للمشروع عبارة عن نموذج حركي.

## 3- نماذج الحصول على الحل الأمثل Optimizing Model

ويحدد هذا النموذج أفضل حل وحيد للمشكلة.

## 4- نموذج عدم الحصول على الحل الأمثل Nonoptimizing Model

هذا النموذج الذي يعطي مخرجات نشاط محدد وليس من اللازم أن يكون أفضل المخرجات.

و هناك تقسيم آخر يهتم بدرجة التأكد والتي يمكن أن تحدد بها عناصر النموذج أو أجزاءه وهو كالآتي:

## A- النموذج المحدد Deterministic Model

وهو النموذج الذي تعرف كل العناصر فيه بأنها تعمل بطريقة محددة. أي بمعنى آخر نفترض في هذا النموذج دائماً أن قيم المتغيرات التي لا يمكن التحكم فيها وقيم المعاملات معروفة مسبقاً وثابتة، ومعظمها تعتمد على الرموز الجبرية والذي يربط إلى تعظيم أو تقليل دالة هدف معينة وذلك طبقاً لقيود ومحددات مفروضة. نموذج كمية الطلب الاقتصادي (EOQ) Economic Order Quantity هو مثال جيد لهذا النوع. فنحسب كمية الطلب الاقتصادية بالصيغة التالية:

$$EOQ = \sqrt{\frac{2DF}{CR}}$$

ويوجد من النموذج ثلاثة عناصر فقط أو ثلاثة متغيرات فقط. تمثل F تكلفة الاستحواذ أو تكلفة إعداد طلب الشراء مثل 20 ديناراً للامر الواحد. وتمثل D كمية المبيعات السنوية لمصدر المخزون، افرض أنها 1000 وحدة. وتمثل CR تكلفة حفظ المتصر في المخزون ولكن 0.16 ديناراً لكل وحدة في السنة. وهذه الأرقام هي أرقام يمكن إدخالها في النموذج لحساب أن حجم الطلب الاقتصادي هو 500 وحدة.

$$EOQ = \sqrt{\frac{2 \times 20 \times 1000}{0.16}} = \sqrt{250000} = 500$$

ولا توجد هناك أية إجابة أخرى، فالمتغيرات تقاطع دائماً بنفس الطريقة.

## B- النموذج الاحتمالي Probabilistic Model

وفي هذا النموذج الاحتمالي لا يمكن التنبؤ فيه بسلوك المتغيرات تنبؤاً دقيقاً.

ثانياً - تحديد إطار المشكلة ثم تحديد الأسلوب الذي يجب اتباعه لتقسيم حل المشكلة. ثالثاً - بناء النموذج الرياضي الذي يمثل المشكلة أو الظاهرة محل الدراسة أو البحث (ترجمة العلاقة بين جميع المتغيرات المتعلقة مباشرة بالمشكلة محل الدراسة وتفرعها في قالب رياضي).

رابعاً - تجميع وترتيب وتحليل البيانات والمعلومات المتعلقة بالمشكلة.

خامساً - استخراج واشتقاق الحل من النموذج.

سادساً - اختبار النموذج والنتائج المتحصل عليها لضمان صلاحية وصحة وواقعية النموذج المقترح.

سابعاً - تفسير النتائج المتحصل عليها.

ثامناً - إتخاذ القرار، ثم التنفيذ والمراقبة.

هذه الإجراءات المتتالية توضح الإطار الفكري العام للمدخل الكمي الذي يجب الاسترشاد به في إتخاذ القرارات الإدارية وتنفيذها. عند هذا الحد أورد أن أوضح أن هذه البنية الجديدة في إتخاذ القرارات يجب ألا ينظر إليها على أساس أنها خطوات أو إجراءات متلاحقة، بل على العكس من ذلك فإن التراجع والتداخل بين هذه الخطوات، باستخدام أسلوب التغذية الراجعة Feed back أو العملية التصحيحية يجب أن يكون متوقفاً عند دراسة كثير من الظواهر والحالات.

هذه البنية العملية الجديدة تبين الأسلوب الذي يجب اتباعه لزيادة العوائد التي تعود على المنظمة وذلك بمحاولة الإجابة عن استفسارات أساسية وهامة، كإيجاد البديل أو الحل الأمثل من بين مجموعة من البدائل بناء على نتائج كل بديل في شكل كمي، الخ.

## النماذج الرياضية وأنواعها:

يعرف النموذج الرياضي بأنه هو عرض مبسط للواقع. ويعتبر النموذج محاولة لتمثيل الواقع حيث يتم إعداده وبناءه بفرض تفسير هذا الواقع من أجل فهمه وتصوره. وبناء على ذلك فإنه يمكن اعتبار النماذج الرياضية على أساس كونها تلك البنية التي تحدد العلاقة رياضياً بين ما يسمى بالمدخلات (المتغيرات، القيود، المعاملات) والمخرجات (قيم دالة الهدف). وبناء النماذج الرياضية هو عصب بحوث العمليات. يوجد العديد من الأنواع الأساسية للنماذج منها طبيعية وقصصية وتخطيطية ورياضية، ونهتم هنا بالنماذج الرياضية فقط. ويمكن تقسيم النماذج الرياضية كالآتي:

## 1- النماذج الساكنة (الاستاتيكية) Static Model

ويمثل هذا النموذج الكينونة التي يعد لها النموذج عند نقطة زمنية معينة. وتقدير

## أسئلة Questions

- 1 - ما هو الفرق بين صناعة القرار وعملية اتخاذ القرار؟
- 2 - حدد أهم القرارات التي يتخذها المشروع لصناعة القرار المتعلق بالمعاملات الإنتاجية مع الشرح كل ما أمكن ذلك.
- 3 - أذكر مع التوضيح للخطوات أو المراحل التي يجب أن يتبناها متخذ القرار، عندما يرغب في اتخاذ قرار معين.
- 4 - المسؤول الإداري عندما يرغب في اتخاذ قرار معين، يجب عليه أن يتعرف على ثلاثة عناصر أساسية وهي: العنصر البشري والأدوات الكمية والبيئة، كيف يتم ذلك؟ ولماذا؟
- 5 - عرّف النموذج الرياضي وما هي الأنواع المختلفة لهذه النماذج؟
- 6 - لماذا نقوم بدراسة الاحتمالات في هذه المادة؟ مع إعطاء فكرة مبسطة لبعض من هذه النماذج الاحتمالية.

## تمارين:

- 1 - نفرض أن مشروعاً معيناً يرغب في اتخاذ قرار يتعلق بزيادة حجم الإنتاج في السنة المقبلة كنتيجة لزيادة حجم الطلب المتوقع على المنتج النهائي. ومن خلال تحليل ودراسة الطاقة الإنتاجية الحالية تبين أن الزيادة في حجم الإنتاج لا يمكن أن تتحقق في ظل الإمكانيات والموارد المعادية والبشرية المتاحة حالياً وأن السيل الوحيد لزيادة الإنتاج يمكن أن يتحقق بأحد البديلين إما:
  - أ - شراء آلة جديدة لرفع مستوى الطاقة الإنتاجية الحالية.
  - ب - زيادة عدد ساعات العمل في المشروع.
 تبين أيضاً من خلال الدراسات والأبحاث التي أجريت على السوق، أن هناك فرصتين متوقعتين فيما يتعلق بتسويق هذه السلعة وهما:
  - أن حجم المبيعات قد يرتفع بنسبة 25% عن العام الماضي.
  - أن حجم المبيعات قد ينخفض بنسبة 5% عن العام الماضي.
 وقد كانت الاحتمالات المصاحبة لهذا الفرض هي 70%، 30% على التوالي، أي بمعنى آخر زيادة المبيعات بنسبة 70%، واحتمال انخفاض المبيعات بنسبة

وتستخدم في هذا النموذج الصيغة احتمالات حدوث الأشياء. ويستخدم المتنبئون بالأحوال الجوية هذا الاتجاه عندما يقولون على سبيل المثال إنه هناك احتمال 30% لهطول الأمطار. ويعبر عن الاحتمالات بنسبة مئوية. فإذا ما كنت متأكداً 100% من حدوث شيء معين فإن احتمال حدوثه هو 1.00 أما إذا كنت متأكداً 100% من عدم حدوث شيء فإن احتمال حدوثه هو (0). وبالإضافة إلى ذلك يجب التفريق بين نوعين من النماذج الرياضية وهي:

- 1 - النماذج الرياضية الخطية.
- 2 - النماذج الرياضية غير الخطية.

حيث إن هذه التفرقة مبنية أساساً على نوع العلاقة الرياضية التي تحكم المتغيرات أو القيود ودالة الهدف. فنجد أن نماذج البرمجة الخطية تفترض دائماً أن العلاقات والارتباطات التي تنقسمها القيود والدوال هي علاقات وارتباطات خطية في حين تفترض النماذج غير الخطية خلاف ذلك.

مع العلم بأن تكلفة شراء الكتاب الواحد بقيمة 6 دنانير وبأن سعر البيع بقيمة 8 دنانير.

المطلوب:

- 1- ما هو عدد الكتب التي يتم شراؤها يومياً، وذلك لتعظيم الأرباح المتوقعة؟
- 2- ما القيمة المتوقعة للمعلومات الكاملة لهذه المكتبة؟
- 3- ما هي الأرباح المتوقعة في اليوم، إذا كانت المكتبة تحتفظ بمخزون من الكتب قدره 100 كتاب؟
- 4- القرات المسلحة لإحدى الدول لها استراتيجية للهجوم على منطقة معينة وذلك لفرض تحريرها. هذا الهجوم يصنف إلى ثلاثة مستويات (خفيف، متوسط، عنيف). وقد تم تصنيف فعاليات العدو بالمنطقة من الآليات إلى أربعة مستويات (1، 2، 3). الجدول التالي يبين الأرباح المقاسة بعدد الوحدات التي سيتم تدميرها.

نوعية الهجوم	مستوى فعاليات العدو		
	0	1	2
خفيف	12	22	32
متوسط	22	32	36
عنيف	16	26	42

المطلوب:

- 1- تحديد الاستراتيجية التي تعظم أقل عائد يمكن تحقيقه؟
- 2- تحديد الاستراتيجية التي تعظم أكبر عائد يمكن تحقيقه؟
- 3- شركة النقل العام للمركاب حددت الخسارة لعدد من التوافق بين الحافلة التي ترغب شرائها، وعدد الركاب المتوقعين في السنة القادمة، وهذه مبينة في الجدول التالي:

30% . وبالإضافة إلى ما ذكر أعلاه، تبين أيضاً أن ارتفاع حتم المبيعات بنسبة 25% يحقق تدفقاً تقديماً يقدر بحوالي 400000 دينار في حالة شراء آلة إضافية، 350000 دينار في حالة زيادة عدد ساعات العمل، ولكن في حالة انخفاض مستوى المبيعات بنسبة 5% فإن التدفق التقدي ينخفض إلى 200000 دينار في حالة شراء الآلة الإضافية وإلى 300000 دينار في حالة تطبيق مبدأ العمل الإضافي.

المطلوب: تحديد البديل الأمثل وذلك عن طريق استخدام أسلوب نموذج القرات.

- 2- محل لبيع منتجات الحليب وشققته يرغب في تحديد كميات الحليب التي ينبغي شراؤها للأسبوع القادم، وهو غير متأكد من حجم المبيعات التي يمكن تصريفها خلال ذلك الأسبوع، ومن خلال الخبرة في هذا العمل التي اكتسبها من خلال السنوات السابقة تبين له العلاقات التالية والتي هي توافق بين الكميات المباعة والكميات المشتراة، والربح المتحقق عند كل توافق منها بالدينار.

حجم المبيعات خلال أسبوع/علب	شراء عدد 2000 علبة	شراء 3000 علبة	شراء عدد 4000 علبة
2000	500	250	150
3000	500	750	500
4000	500	750	1000

المطلوب

- 1- بواسطة استخدام قاعدة تعظيم أكبر ربح يمكن تحقيقه، ما هي الكميات التي يجب على هذا المحل شراؤها، وذلك في الأسبوع القادم؟
- 2- ما الكميات التي يجب على المحل شراؤها وذلك إذا استخدم قاعدة تعظيم أقل عائد يمكن تحقيقه؟
- 3- إذا كانت المعلومات المبينة في الجدول التالي والتي تبين مبيعات الكتب العلمية لإحدى المكتبات وذلك خلال المدة السابقة.

عدد الكتب المباعة	التكرار/بالآيام	احتمال التكرار	الاحتمالات المتجمعة
200	12	12	1.00
400	32	32	0.90
600	60	60	0.60
800	10	10	0.10



## الفصل الثالث

### البرمجة الخطية

#### Linear Programming

##### ■ المقدمة Introduction:

بدأت تطبيقات البرمجة الخطية في مجال اتخاذ القرارات أثناء الحرب العالمية الثانية حينما بدأ البريطانيون استخدامها في توزيع الطائرات وحاملات القتال على المواقع المعادية، وقد تطورت البرمجة الخطية بسرعة كبيرة من ذلك الحين وبدأ استخدامها في العديد من المشاكل التي تواجه الإدارة في العمليات الحربية، وكذلك في عمليات إدارة الأعمال وفي الإدارة الحكومية (العامة). ويرجع الفضل لجورج دانتيج George B. Dantzig في اكتشاف الطريقة المنتظمة لحل مجموعة من المشاكل التي تتوافر فيها شروط البرمجة الخطية. فقد نشر أول بحث عنها في الولايات المتحدة الأمريكية سنة 1947. وعرفت هذه الطريقة المنتظمة من ذلك الحين بطريقة السيمبليكس Simplex Method. وحيث إن هذه الطريقة تقوم على تكرار تطبيق مجموعة محددة من القواعد حتى يتم التوصل إلى حل المشكلة موضع التطبيق، فقد أصبحت سهلة التطبيق على الحاسبات الآلية. وقد أدى ذلك إلى إمكان تطبيقها على عدد كبير من المشاكل الإدارية التي تنطوي على عدد كبير جداً من المتغيرات.

البرمجة الخطية: هي إحدى الأساليب التي تستخدم في علم بحوث العمليات، وهي طريقة رياضية تمكن من التوصل لأفضل أو أسوأ الحلول الممكنة لمجموعة من المشاكل التي تتوافر فيها شروط رياضية معينة. فنجد أن كلمة «البرمجة» تشير إلى الطريقة الرياضية المنتظمة التي يتم على أساسها التوصل إلى الحل الأمثل للمشكلة موضع التطبيق من بين كل الحلول المتاحة والممكنة. بينما نجد كلمة «خطية» تشير إلى الشروط الواجب توافرها في المشكلة موضع التطبيق حتى يتسنى حلها بالبرمجة الخطية. وهذه الكلمة مستخدمة لوصف العلاقة بين متغيرين أو أكثر، وهي علاقة مباشرة ومتغير بنفس النسبة.

نوعية الهجوم	مستوى عدد الركاب خلال السنة القادمة			
	(1000 - 0)	(1000 - 1000)	(1500 - 1500)	(2000 - 2000)
صغير	200	300	300	100
متوسط	280	200	0	150
كبير	700	90	100	0

المطلوب: تحديد الخطة الاستراتيجية التي يجب على الشركة اتباعها، وذلك بتطبيق قاعدة تقليل أكبر خسارة يمكن تكبدتها.



أصبحت البرمجة الخطية من الأساليب الكمية الراسخة التطبيق في مجالات البحث العلمي والنظري ولحل المشاكل العلمية في مجالات مختلفة مثل الصناعة والزراعة والنقل والمواصلات، وفي حل المشاكل الاقتصادية والهندسية وغيرها. وتطبق البرمجة الخطية بنجاح في مجالات تخطيط وجدولة الإنتاج الصناعي واختيار نسبة مزيج المدخلات، وفي تخطيط وجدولة الإنتاج الزراعي وتحديد المرافعات المالية للأعلاف، وفي الإقراض من الناقد والمادام، وفي تخطيط وجدولة النقل بشتي الطرق، وذلك بالإضافة إلى العديد من التطبيقات العسكرية والتخطيط الاقتصادي على المستوى القومي بصفة عامة، وغيرها.

وفي ما يتعلق بتطبيق البرمجة الخطية في مجال إدارة الأعمال، نستطيع أن نقول بأن أوجه التطبيق عديدة لا حصر لها تقريباً، وكل يوم يحمل إلينا تطبيقاً جديداً للبرمجة الخطية على إحدى المشاكل الإدارية أو الاقتصادية. إن تطبيق البرامج الخطية على المشاكل التي نواجهها يتطلب خبلاً خفياً وقدرة على تكوين المعادلات الجبرية كترجمة لوقائع الشروط والمشاكل التي نحاول إيجاد حل لها في الحياة العملية. وتعد البرمجة الخطية من أولى مواضيع بحوث العمليات التي استعملت واكتسبت شهرة واسعة في مجالات التطبيق الإدارية والاقتصادية. فمشكلة توزيع المواد النادرة تحت شروط وانقراضات معينة مشكلة تعرض لها إدارة الأعمال كل يوم تقريباً في المجالات الوظيفية المختلفة، سواء كان هذا في إدارة التوزيع أو إدارة الإنتاج أو إدارة الأفراد أو التسويق. وضافة إلى النتائج الواضحة والمحددة التي نصل إليها في البرمجة الخطية - وهي بالتأكيد أكثر دقة من استعمال الطريقة التخمينية والقدرة الفردية في محاولة حل المشاكل - يمكننا الحصول على القوائد التالية للإدارة:

1- تقوم البرمجة الخطية بدور ملحوظ في المساعدة على تحليل المشاكل التي تتميز بعدد كبير من المتغيرات والشروط.

2- تساعد البرمجة الخطية في إزغام الإدارة والمحللين على تحليل التكاليف والإيرادات الخاصة بكل مورد من الموارد المراد توزيعها على البدائل المختلفة. كذلك يمكن للإدارة عن طريق تحليل الحساسية Sensitivity Analysis وتفسير قيمة بعض المتغيرات أو بعض الشروط والعقيدات أو بعض أرقام التكاليف والإيرادات معرفة مدى تأثير ذلك على قرارات التوزيع والقرارات الإدارية المختلفة، وعلى هذا يمكننا تقدير وتقييم احتمالات الخطأ في التكوين الرياضي للمشكلة وتأثر هذا التكوين على النتائج والأرباح أو التكاليف.

خلاصة القول، يمكن أن نقول بأن البرمجة الخطية تستخدم في جميع المجالات المختلفة في حالة توافر المعلومات والبيانات المتفقة مع الشروط الأساسية لهذا النموذج.

■ الشروط الأساسية التي يجب توافرها عند استخدام أو تطبيق أسلوب البرمجة الخطية:

البرمجة الخطية - مثلها في ذلك مثل أي من أساليب ونماذج التحليل الكمية الأخرى - لا تصلح للاستخدام في حل كل المشكلات الإدارية، وإنما هي محددة بتوافر شروط تطبيقها. والشروط هي على النحو الآتي:

1- يجب أن يكون هناك هدف واضح ومحدد تحديداً دقيقاً ويمكن صياغته في صيغة رياضية صريحة. وهذا الهدف إما أن يكون:

أ- البحث عن أعلى ربح ممكن (القيمة العظمى Maximization Value)

ب- البحث عن أقل تكلفة ممكنة (القيمة الصغرى Minimization Value).

2- يجب أن تعكس الصيغة الرياضية للهدف المراد تحقيقه علاقة خطية متجانسة من الدرجة الأولى. وأن تكون هناك بدائل مختلفة للوصول إلى الهدف.

3- يجب أن تكون الموارد المتاحة لدى المشروع محدودة ويمكن استخدامها بطرق متعددة.

4- يجب أن يتوافر لدى المشكلة عدد من البدائل التي يمكن من خلالها الوصول إلى الهدف، ولا يمكن إيجاد الحل الأمثل بواسطة استخدام الطرق التقليدية. فإذا كانت المشكلة ذات حل أوحد فلا داعي لاستخدام أي أسلوب لحلها حيث لا توجد بدائل للمفاضلة والاختيار من بينها.

5- يجب أن تكون العلاقة بين الموارد المتاحة والمحدودة ومتغيرات الهدف المراد تحقيقه علاقات خطية متجانسة من الدرجة الأولى، وقابلة للصياغة في صورة معادلات رياضية صريحة.

6- يجب أن تتوفر المقائيس الكمية الدقيقة والمؤكدّة لعناصر المشكلة.

الآن قبل الحديث عن الخطوات الأساسية التي يجب اتباعها عند تكوين أو بناء مشكلة البرمجة الخطية، يجب إعطاء فكرة مبسطة عن بعض المصطلحات العامة التي تستخدم عند استعمال أسلوب البرمجة الخطية.

■ توضيح بعض المصطلحات العامة المستخدمة للبرمجة الخطية:

القيمة الصغرى Minimization Value: وهي تعني بأن المشروع يسعى إلى تخفيض التكاليف إلى أقل تكلفة ممكنة.

القيمة العظمى Maximization Value: وهي تعني بأن المشروع يبحث في تحقيق أعلى ربح ممكن.

عدد الوحدات المنتجة من السلعة الثانية =  $y$

### ثانياً - تحديد دالة الهدف Determining The Objective Function :

بعد أن نحدد عدد المتغيرات في مشكلة معينة، علينا أن نتساءل ما هو تأثير المتغيرات والقيم المختلفة على دالة الهدف؟ ففي حالة ما يكون الهدف هو البحث على القيمة العظمى (الأرباح) للمشكلة فعلينا أن نتساءل أو نتعرف على ما هو تأثير هذه التغيرات على الأرباح؟ فيجب دراسة هذه العلاقات وتحديد ما لأنها هي التي بدورها تحدد دالة الهدف Objective Function، وهذه الدالة تعتبر هي المحور الأساسي لتحليل المشكلة لإيجاد الحل الأمثل. ففي بعض الحالات نجد أن دالة الهدف تتكون من مجموعة من الخطوط المتوازية تتغير تبعاً لتغير القيمة في المتغيرات الموجودة في المشكلة.

رابعاً - تحديد الحدود والمقيدات في المشكلة والتعبير عنها في شكل متباينات Determining Constraints :

وضع القيود اللازمة على المتغيرات وعرض هذه القيود بشكل معادلات قابلة للحل، وذلك لأن الموارد التي قد تتوفر تماثل بأنها محدودة القيمة.

### خامساً - التكوين النهائي للمشكلة Final Formulation :

قبل البدء في إيجاد الحل الأمثل لهذه المشكلة فمن المستحب وضع ملخص لها، وضع المشكلة في صورة معادلات رياضية خطية ويكون الشكل الرياضي العام لمسائل البرمجة الخطية. وهذه العلاقات الرياضية يجب أن تكون على النحو التالي:

- 1- معادلة دالة الهدف (عظمى Max أو صغرى Min).
- 2- مجموع المعادلات الخطية المفروضة التي تبين شروط ومقيدات المسألة.
- 3- شرط عدم السلبية Nonnegativity Constraint. وفي هذه الحالة يجب وضع المتغيرات المفروضة بأنها تساوي أو أكبر من الصفر (أي أنها تكون صفراً أو قيماً موجبة). لأنه من غير المنطقي أن تقول بأن إنتاج مصنع معين من السلعة يكون بالسالب.

سادساً - استخدام إحدى الطرق للبرمجة الخطية وهي على النحو الآتي:

- 1- طريقة التحليل البياني Graphical Method.
- 2- طريقة السيمبلكس Simplex Method.

### تكوين أو بناء المشكلة على صورة معادلات رياضية Formulating the Problem :

- 1- تكوين المشكلة في حالة القيمة العظمى:
- مثال (1): سوف نأخذ المثال التالي لتوضيح الخطوات الأساسية للبرمجة الخطية:

منطقة الحلول العملية The Feasible Solution Region : تتحدد هذه المنطقة في مشكلة البرمجة الخطية على أساس الناتج الصافي من جميع الشروط والمقيدات الموجودة في المشكلة والتي يجب أن يستوفها أي حل تقترضه.

الحل العملي: يعرف بأنه أي حل يستوفي جميع الشروط والمقيدات الموجودة في التكوين النهائي للمشكلة.

الحلول غير العملية: هي الحلول التي لا تتقيد بشرط أو أكثر من الشروط المفروضة.

الحلول الأساسية The Basic Solutions : تتمثل في أي حل تكون فيه عدد المتغيرات الإيجابية (فوق الصفر) مساوية لعدد الشروط الموجودة في المشكلة، سواء كانت المتغيرات الإيجابية من المتغيرات الأساسية أو من المتغيرات الإضافية. والواقع أن الحلول الأساسية هي حلول ركنية Corner Solution بمعنى أنها تمثل حلولاً تقع في الأركان الموجودة في منطقة الحلول العملية.

الحل الأمثل: هو الحل الذي نختاره من بين عدد من الحلول أو المقترحات أو البدائل أو الخطط التي يمكن وضعها بحيث يشترط أن يحقق بها الحل الأمثل للنموذج الرياضي الشروط الموضوعية للمسألة والهدف من حلها، وقد يكون هذا الحل حلاً وحيماً أو قد يحصل في بعض الأحيان على أكثر من حل يحقق القيمة العظمى للناتج الهدف.

• الخطوات الأساسية التي يجب اتباعها عند تكوين مشكلة البرمجة الخطية:

أولاً - تحديد طبيعة المشكلة (تحديد الهدف) Determining the Nature of the Problem :

وهي تتعلق بكيفية الوصول إلى أقصى الإيرادات (الأرباح) أو أقل تكلفة (المصروفات) ممكنة وربما أيضاً أقل الخسائر الممكنة وكذلك ما هي الإيرادات والمصروفات المتعلقة بالمشكلة. في هذه الخطوة يمكن أن نتساءل مثلاً: أين توجد المشكلة؟ ما هو سبب المشكلة؟ هل هذا هو السبب الحقيقي؟

### ثانياً - تحديد المتغيرات التي تؤثر على هذه المشكلة Determining The Variables :

وهي تلك المتغيرات الموجودة في مشكلة البرمجة الخطية والتي تؤثر على الإيرادات والتكاليف وذلك حسب تغيرها. ومن خلال هذه المتغيرات نحاول تغييرها حتى نتمكن من الوصول إلى الحل الأمثل. وهذه المتغيرات تتمثل في المنتجات التي يمكن إنتاجها ربيعاً، أو عوامل الإنتاج التي يمكن أن تقدم بنسب مختلفة لإنتاج سلعة أو منتجات محددة ومعرفة مثلاً:

عدد الوحدات المنتجة من السلعة الأولى =  $x$

- سعر البيع لكل من السلعتين والتكلفة المتغيرة.
- الطاقة المحدودة والمتاحة في كل من المرحلتين.
- احتياجات كل من السلعتين من طاقة كل من المرحلتين.

#### • التعليق

أولاً - تحديد طبيعة المشكلة (تحديد الهدف) Determining the Nature of the

#### Problem

نجد أن المشكلة في المثال (1) تتعلق بكيفية الوصول إلى أقصى الإيرادات (الأرباح) الممكنة. والهدف هنا هو تحقيق أعلى ربح ممكن وذلك من خلال بيع هاتين السلعتين الدراجات العادية والثائرة.

ثانياً - تحديد المتغيرات التي تؤثر على هذه المشكلة Variables Determining وهي تمثل في الطاقة المحدودة والمتاحة ومنطقة الإمكانات:

وهي تلك المتغيرات الموجودة في مشكلة البرمجة الخطية والتي تؤثر على الإيرادات والتكاليف وذلك حسب تغيرها. ومن خلال هذه المتغيرات نحاول تغييرها حتى نتمكن من الوصول إلى الحل الأمثل. وهذه المتغيرات تتمثل في المنتجات التي يمكن إنتاجها وبيعها، أو عوامل الإنتاج التي يمكن أن تقدم بنسب مختلفة لإنتاج سلعة أو منتجات محددة ومعروفة. ففي هذا المثال يمكن أن نوزع للسلع المنتجة كالآتي:

$$\begin{aligned} \text{عدد الوحدات المنتجة من السلعة الأولى (الدراجات العادية)} &= x \\ \text{عدد الوحدات المنتجة من السلعة الثانية (الدراجات الثائرة)} &= y \end{aligned}$$

تمثل الطاقة المحدودة والمتاحة الموارد النادرة المراد استغلالها أفضل استغلال ممكن لتحقيق الهدف المرغوب على أفضل صورة ممكنة. ويمثل المقدار المحدود والمتاح منها الحد الأقصى كما يمكن استخدامه خلال الفترة، وبالتالي فهي تمثل مجموعة القيود المحددة لإمكانات تحقيق الأهداف. فكل مستوى من الأهداف يتطلب لأغراض تحقيقه قدرًا يقل عما هو متاح من الموارد الثانية أو يساويه ويصبح مستوى ممكن التحقيق من الأهداف. أما أي مستوى يتطلب قدرًا يزيد عما هو متاح من هذه الموارد فهو غير قابل للتحقيق، ويخرج عن حدود الإمكانات المتاحة. فإذا كان حجم الإنتاج في المثال (1) يتطلب ما يزيد عن 12 ساعة/عمل أو ما يزيد عن 16 ساعة/عمل في الفترة التكاليفية يعتبر خارجاً على حدود إمكانات الموارد المتاحة ولا يمكن تحقيقه. وتحدد الطاقة المحدودة والمتاحة لمجموعة الموارد الثانية بصمة مجتمعة منطقة الإمكانات التي في حدودها يمكن تحقيق الأهداف المرغوبة.

ولعله من الواضح أنه ما لم توجد موارد محددة المقدار أو القدرة تلمزم لتحقيق

نفرض أن هناك مشروعاً يقوم بإنتاج نوعين (نمطين) من المنتجات ولكن الدراجات العادية والدراجات الثائرة. ويتم إنتاج كل من السلعتين على مرحلتين إنتاجيتين: المرحلة الأولى آلية حيث يتم تصنيع الأجزاء الرئيسية لكل من السلعتين. والمرحلة الثانية يدوية حيث يتم تجهيز وضبط وتنظيف وتجميع وتعبئة كل من السلعتين. لنفرض أيضاً أن الطاقة المحدودة والمتاحة في المرحلة الآلية تبلغ 12 ساعة/عمل. بينما تبلغ الطاقة المحدودة والمتاحة في المرحلة اليدوية 16 ساعة/عمل. وتبلغ الوحدة الواحدة من الدراجات العادية 25 ديناراً، بينما تبلغ الوحدة الواحدة من الدراجات الثائرة 50 ديناراً. وتبلغ التكلفة المتغيرة للوحدة من الدراجات العادية من مواد وأجور ومصاريف صناعية متغيرة 15 ديناراً. بينما تبلغ هذه التكاليف في الدراجات الثائرة 20 ديناراً. وتحتاج الوحدة الواحدة من الدراجات العادية إلى 4 ساعات من طاقة المرحلة الآلية و8 ساعات من طاقة المرحلة اليدوية. بينما تحتاج الوحدة من الدراجات الثائرة إلى 6 ساعات من طاقة المرحلة الآلية و4 ساعات من طاقة المرحلة اليدوية. هذا وترغب إدارة المشروع أن تتخذ القرار بحيث تعرف على أفضل تشكيلة إنتاجية تؤدي إلى تعظيم أرباح الفترة التكاليفية.

#### • المطلوب:

- 1- وضع هذه المشكلة في صورة معادلات رياضية (التكوين النهائي للمشكلة).
- 2- تحديد الميزج السلمي من السلعتين الذي يحقق أقصى ربح ممكن وذلك في حدود الطاقة المحدودة والمتاحة بقسمي الإنتاج.
- 3- إيجاد عدد الساعات غير المستغلة وفي أية مرحلة إن وجدت.
- 4- ما هو القرار الأمثل الذي يجب اتخاذه إذا تغيرت أرباح السلعتين كأن يصبح المشروع يحقق ربحاً قدره 30 ديناراً عن الدراجة العادية و10 دنانير عن الدراجة الثائرة (اختيار الحساسية)؟

#### • الحل

المعلومات المتوفرة في المثال (1) يمكن تلخيصها في الجدول (1 - 3)

جدول (1 - 3) ملخص لمعلومات المشكلة

المرحلة الآلية المرحلة اليدوية		تصنيع		التكلفة المتغيرة للوحدة	
السلعة الأولى (الدراجات العادية)	السلعة الثانية (الدراجات الثائرة)	المرحلة الآلية	المرحلة اليدوية	للوحدة	للوحدة
4 ساعات	6 ساعات	8 ساعات	4 ساعات	15 ديناراً	20 ديناراً
4 ساعات	6 ساعات	25 ديناراً	50 ديناراً	25 ديناراً	50 ديناراً
12 ساعة	16 ساعة				

وتتحدد العوامل المؤثرة في حل هذه المشكلة البسيطة في ما يلي:

الوحدة موحدة وثابت ولا تتأثر بحجم المبيعات. ويمثل الفرق بين سعر البيع والتكلفة المتغيرة ما يسمى بالربح المباشر، وهو الفائض من سعر البيع بعد تغطية التكاليف المتغيرة للمتغيرة، للمشاركة في تغطية التكاليف الثابتة وتحقيق الأرباح الصافية. فمن حصة الربح المباشر يتم تغطية التكاليف الثابتة، والزيادة في الحصة تمثل أرباحاً صافية، كما أن العجز فيها يمثل خسائر صافية. وفي افتراضاتنا السابقة يكون الربح المباشر لوحدة المنتج مقداراً ثابتاً، وتكون علاقة حصة الربح المباشر لسلمة معينة (أو لشبكة ثابتة من السلع) علاقة خطية. وطبقاً لما تقدم يكون الربح المباشر للوحدة من كل من السلعتين كما في الجدول (2 - 3).

جدول (2 - 3) ربح الوحدة الواحدة من السلعتين

سعر بيع الوحدة	التكلفة المتغيرة للوحدة	الربح المباشر للوحدة
25	15	10 دينار
50	20	30 ديناراً

وإذا رمزنا إلى حجم الإنتاج للسلمة الأولى (الدراجات العادية) بالرمز  $X$  وإلى حجم الإنتاج للسلمة الثانية (الدراجات النارية) بالرمز  $Y$  فإن دالة الربح المباشر أو الدالة الربحية للسلعتين معاً سوف تكون على النحو التالي:

$$\text{Max. } Z = 10x + 30y \quad (\text{القيمة الكبرى})$$

هذه تعني أن حصة الربح المباشر من إنتاج وبيع السلعتين تتكون من 10 دنانير مضروبة في عدد الوحدات  $x$  التي يتم إنتاجها وبيعها من السلمة الأولى (الدراجات العادية) مضافاً إليها 30 ديناراً مضروبة في عدد الوحدات  $y$  التي يتم إنتاجها وبيعها من السلمة الثانية (الدراجات النارية).

وحيث إن المشروع الذي افترضناه يهدف إلى تعظيم الأرباح، وحيث إن تعظيم حصة الأرباح المباشرة يؤدي إلى تعظيم الأرباح الصافية ما دامت التكاليف الثابتة لا تتأثر بحجم الإنتاج والبيعات، فإن دالة الربحية نطلق عليها دالة الهدف، وهي الركن الأول من أركان نموذج البرمجة الخطية. وتعتبر دالة الهدف دالة التفضيل والاختيار بين البدائل المختلفة للتوصل إلى أفضلها على الإطلاق.

رأبماً - تحديد الحدود والمقيدات في المشكلة والتعبير عنها في شكل متباينات

#### Determining Constraints

وضع القيود اللازمة على المتغيرات وعرض هذه القيود بشكل معادلات قابلة للحل، وذلك لأن الموارد التي قد تتوفر تمتاز بأنها محدودة القيمة. بمعنى أنه يجب

الأهداف المرغوبة فإنه لن يكون هناك قيود أو عوائق في سبيل تحقيق أي مستوى من هذه الأهداف. وفي ظل هذه الظروف لن تكون هناك مشكلة تحتاج إلى التوصل إلى الحل الأمثل. وبمعنى آخر، فإنه يلزم أن نتواجد في المشكلة عملية الندرة حتى يمكن تطبيق البرمجة الخطية لحلها.

وحيث إن المقدار المحدد من الموارد المحدودة يضع قيوداً على إمكانيات الأهداف، فإن تحديد هذا المقدار على وجه الدقة وبدرجة عالية من التأكيد يصبح من مستلزمات التوصل لأفضل الحلول الممكنة للمشكلة قيد البحث والدراسة. فأي خطأ في تحديد المقدار المتاح من الموارد بالزيادة قد يؤدي إلى التوصل إلى حل لا يمكن تحقيقه للمشكلة. كما أن أي خطأ في تحديد هذا المقدار بالنقص قد يؤدي إلى حل غير مثالي للمشكلة الحقيقية.

ثالثاً - تحديد دالة الهدف والتعبير عنها في صورة معادلة رياضية

#### Objective Function

في المثال (1) يجب أن نتساءل عن سعر بيع السلمة وتكلفتها المتغيرة ومن خلال المقارنة بينها يمكن تحديد دالة الهدف. ومن المعروف أن التكلفة تنقسم إلى عناصر متغيرة وعناصر ثابتة. والعناصر المتغيرة في هذا الصدد هي تلك التي ترتبط بحجم إنتاج سلمة معينة وتتأثر بالتغيرات التي تطرأ عليه إيجاباً وسلباً تأثراً طردياً. بمعنى أنه عندما يزداد حجم الإنتاج تزداد التكاليف المتغيرة وعندما ينخفض حجم الإنتاج تنخفض التكاليف المتغيرة للحجم الجديد عن الحجم السابق. وسوف نفترض هنا بأن هذه العلاقة الطردية بين التكلفة المتغيرة وحجم الإنتاج لسلمة معينة تكون ذات نسبة ثابتة، أي أنها خطية ومتجانسة ومن الدرجة الأولى. وهذا يعني أن التكلفة المتغيرة للوحدة من السلمة تقل مقداراً ثابتاً بعرض النظر عن التغيرات في حجم الإنتاج. مثلاً إذا زاد حجم الإنتاج للسلمة الأولى (الدراجات العادية)، فلو فرضنا أن عدد الوحدات المنتجة لهذه السلمة زاد من وحدة واحدة إلى عشر وحدات، فإن التكلفة المتغيرة لحجم الإنتاج تزيد من 15 ديناراً إلى 150 ديناراً ومع ذلك تظل التكلفة المتغيرة للوحدة 15 ديناراً. أما إذا أدت زيادة حجم إنتاج السلمة الأولى (الدراجات العادية) إلى 10 وحدات إلى زيادة التكلفة المتغيرة للحجم مثلاً 166 ديناراً أو إلى 122 ديناراً فإن العلاقة في هذه الحالة لا تكون خطية. ويجب أن يكون واضحاً في ذهن القارئ أنه يلزم تطبيق البرمجة الخطية أن تكون كل العلاقات خطية. أما التكاليف الثابتة فهي لا ترتبط بحجم الإنتاج في الفترة القصيرة، وإنما ترتبط بالزمن (المدى الطويل). هذا ولا يعدد بالتكاليف الثابتة لأغراض تخطيط الإنتاج والأرباح في الفترة القصيرة عن طريق البرمجة الخطية.

المقصود بسعر البيع هو السعر الذي يقوم المشروع موضوع البحث بتصفير السلمة على أسامه سواء للوسطاء أو المستهلكين. ونفترض في هذا الصدد أن سعر بيع السلمة

من السلعتين أقل من الصفر، ذلك لأنه لا يمكن إنتاج حجم سالب. ويعني ذلك أن الحد الأدنى لحجم الإنتاج من السلعة الأولى هو الصفر، وكذلك بالنسبة للحد الأدنى لحجم السلعة الثانية. ويتم التعبير عن ذلك رمزياً كالآتي:

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

وهذان القيودان يعبران عن شرط عدم السلبية أو القيود التفاضلية في نموذج البرمجة الخطية، وهي الركن الثالث من أركان النموذج.

خامساً - المكوّن النهائي للمشكلة Final Formulation الصياغة الرياضية للمشكلة النموذج الخطية للبرمجة الخطية

قبل البدء في إيجاد الحل الأمثل لهذه المشكلة من المستحب وضع ملخص لها: وضع المشكلة في صورة معادلات رياضية خطية. ويتكون الشكل الرياضي العام لمساائل البرمجة الخطية. وهذه العلاقات الرياضية لهذا المثال يجب أن يكون على النحو التالي:

$$1- \text{معادلة دالة الهدف (عظمي): } (Max)$$

$$2- \text{المعادلات الخطية المفروضة التي تبتن شروط ومقيدات والمساواة.}$$

$$3- \text{شرط عدم السلبية.}$$

يتحدد الهدف المراد تحقيقه بحل المشكلة بمعادلة دالة الهدف  $Max. Z = 10x + 30y$  (القيمة الكبرى) ويتحقق هذا الهدف في ظل القيود الموضوعية المفروضة بالمبتاتين:

$$4X + 6Y \leq 12 \text{ المرحلة الآلية}$$

$$8X + 4Y \leq 16 \text{ المرحلة اليدوية}$$

والقيود التفاضلية الظاهرة في المبتاتية:

$$x, y \geq 0$$

وحيث إن الأهداف المراد تحقيقه هو تعظيم حصيلة الأرباح المباشرة التي نرمر لها بالرمز (Z) فإن الصيغة الرياضية للمشكلة تتخذ الشكل النهائي لها وهي كالآتي:

$$\text{دالة الهدف (القيمة الكبرى)} \quad Max. Z = 10x + 30y$$

القيود

$$4X + 6Y \leq 12 \text{ المرحلة الآلية}$$

$$8X + 4Y \leq 16 \text{ المرحلة اليدوية}$$

شروط عدم السلبية:

$$x, y \geq 0$$

تحديد احتياجات المنتجات من طاقة الموارد وقود النموذج.

تمثل احتياجات المنتجات من الموارد علاقات المستخدم من الموارد الثانية والمنتج. ولنرم في نموذج البرمجة الخطية أن تكون هذه العلاقات خطية متجانسة من الدرجة الأولى، بمعنى أنه إذا كانت الوحدة من المنتج الأول تحتاج إلى 3 ساعات من طاقة المورد الأول فإن وحدتين من السلعة نفسها يجب أن تستنفد 6 ساعات من المورد نفسه و10 وحدات من السلعة نفسها تستلزم استنفاد 30 ساعة من المورد نفسه وهكذا. ويعبر عن ذلك اقتصادياً بأن دالة الإنتاج تكون خطية متجانسة من الدرجة الأولى، أو بثبات غلة الموارد الثانية من حجم الإنتاج.

ففي السابق رمزنا لعدد الوحدات المنتجة من السلعة الأولى بالرمز X وللسلعة الثانية بالرمز Y، فإننا الآن نستطيع التعبير عن علاقات المنتجات بالموارد في هذا المثال بالصورة الجبرية المبسطة التالية:

$$4X + 6Y \leq 12 \text{ المرحلة الآلية}$$

$$8X + 4Y \leq 16 \text{ المرحلة اليدوية}$$

ونعني المبتاتية  $4x + 6y \leq 12$  أن عدد الوحدات التي يتم إنتاجها من السلعة الأولى (الدراجات العادية) x مضروبة في احتياجات كل وحدة من طاقة المرحلة الأولى (4 ساعات) مضافاً إليها عدد الوحدات التي يتم إنتاجها من المنتج الثاني (الدراجات النارية) y مضروبة في احتياجات كل وحدة من طاقة المرحلة الأولى (6 ساعات) وهذا يجب أن لا يزيد عن مجموع حاصل الضرب عن الطاقة المتاحة في هذه المرحلة (12 ساعة/عمل)، أو يجب أن يقل عنه أو يساويه ( $\leq$ ). وكذلك الأمر بالنسبة للمبتاتية  $8x + 4y \leq 16$  بالنسبة للمرحلة الثانية، ويطلق على المبتاتيتين:

$$4x + 6y \leq 12$$

$$8x + 4y \leq 16$$

القيود الموضوعية لمشكلة البرمجة الخطية، وهي الركن الثاني من أركان النموذج. كما يطلق على احتياجات المنتجات من الموارد معاملات الاستخدام أو المعاملات الفنية. فمعامل استخدام السلعة الأولى من المرحلة الأولى 4 ومعامل استخدام نفس السلعة من المرحلة الثانية 8، بينما معامل استخدام السلعة الثانية من المرحلة الأولى 6 ومعامل استخدام هذه السلعة من المرحلة الثانية 4 ولنرم أن تكون هذه المعاملات ثابتة بعرف النظر عن التقلبات في حجم الإنتاج. كما يلزم أن يتم تحديد هذه المعاملات بدقة متناهية وبدرجة عالية من التأكد حتى يؤدي نموذج البرمجة الخطية إلى التوصل إلى الحل الأمثل الحقيقي للمشكلة. ونلاحظ في المثال السابق أنه من غير المنطقي أن يكون حجم الإنتاج



### جدول (3 - 3) أمثلة لكيفية إيجاد التكوين النهائي لمشكلة البرمجة الخطية للقيمة العظمى

التكوين النهائي للمشكلة	المشكلة															
<p>دالة الهدف: <math>\text{Max. } Z = 2x_1 + 3x_2</math></p> <p>قيود أو شروط المشكلة:</p> <p>الآلة (1) <math>10x_1 + 5x_2 \leq 600</math></p> <p>الآلة (2) <math>6x_1 + 20x_2 \leq 600</math></p> <p>الآلة (3) <math>8x_1 + 15x_2 \leq 600</math></p> <p>شروط عدم السلبية: <math>x_1, x_2 \geq 0</math></p> <p>القيمة العظمى: <math>Z = 141.7</math></p> <p>عند <math>x_1 = 54.5</math> و <math>x_2 = 10.9</math></p>	<p>(1) - تم إنتاج نوعين من المنتجات على ثلاث آلات حيث تعمل الآلة الثالثة لمدة كل آلة 10 ساعات يومياً. بعض الميول التي زُمن الإنتاج بالدفق وبيع الوحدة لكل نوع من المنتجات.</p> <p>بيع الوحدة:</p> <table border="1"> <tr> <th>الآلة</th> <th>النوع 1</th> <th>النوع 2</th> </tr> <tr> <td>1</td> <td>10</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>6</td> <td>20</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>8</td> <td>15</td> </tr> </table> <p>المطلوب: أمثلة للمشكلة على شكل برمجة خطية، وإيجاد الحل الأمثل.</p>	الآلة	النوع 1	النوع 2	1	10	5	2	6	20	3	8	15			
الآلة	النوع 1	النوع 2														
1	10	5														
2	6	20														
3	8	15														
<p>دالة الهدف: <math>\text{Max } Z = 55x_1 + 55x_2 + 70x_3 + 55x_4</math></p> <p>شروط المشكلة:</p> <p>الآلة (1) <math>2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 500</math></p> <p>الآلة (2) <math>3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 380</math></p> <p>شروط عدم السلبية: <math>x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0</math></p>	<p>(2) - يتم إنتاج 4 منتجات بصورة منتظمة على السنتين ويظهر الجدول التالي زمن إنتاج الوحدة على كل آلة:</p> <table border="1"> <tr> <th>الآلة</th> <th><math>x_1</math></th> <th><math>x_2</math></th> <th><math>x_3</math></th> <th><math>x_4</math></th> </tr> <tr> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>3</td> <td>2</td> <td>1</td> <td>2</td> </tr> </table> <p>وتعتمد التكلفة الكلية لإنتاج الوحدة من كل منتج بصورة منتظمة على زمن الآلة (المقرر بالساعة) ويُفرض أن تكلفة عمل الساعة للآتين 1 و 2 تبلغ 10 دولار و 15 دولار على التوالي. وأن العالمة للمصنعة لإنتاج على الآتين بلغت 380 و 500 ساعة عمل على التوالي. وأن سعر بيع الوحدة من المنتجات يبلغ الآلة الأولى 65 دولار و 70 دولار و 70 دولار و 55 دولار.</p> <p>المطلوب: أمثلة للمشكلة في شكل نموذج برمجة خطية لتحقيق أقصى ربح ممكن؟</p>	الآلة	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	1	2	3	4	2	2	3	2	1	2
الآلة	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$												
1	2	3	4	2												
2	3	2	1	2												
<p>دالة الهدف: <math>\text{Maximize } (z) = 8L + 6T</math></p> <p>شروط وجود المشكلة:</p> <p><math>4L + 2T \leq 60</math></p> <p><math>2L + 4T \leq 48</math></p> <p>شروط عدم السلبية: <math>L, T \geq 0</math></p>	<p>(3) - مصنع ينتج نوعين من أثاث الكاتب: مكاتب، وكراسيات (دولاب)، وطاولات وكراسيات (دولاب). يطلب إنتاج هذين المنتجين مرورهما على قسمين إنتاجيين وهما: قسم التصنيع وكراسيات (دولاب)، وقسم التصنيع النهائي وكراسيات (دولاب). يُفرض أيضاً أن العالمة الإنتاجية للكراسيات المذكورتين بالساعات: هي 60 ساعة لتقسيم التصنيع، و 48 ساعة لقسم التصنيع النهائي. وأن كل مكينة تحتاج لآربع ساعات في قسم التصنيع وكراسيات في قسم التصنيع النهائي، بينما تحتاج كل طاولات لساعتين في قسم التصنيع، و أربع ساعات في قسم التصنيع النهائي، وأن كل مكينة هي عالية دالة و رسة دنانير من كل طاولات. المطلوب: ما هو عدد الوحدات التي يجب على المصنع إنتاجها من المنتجين بحيث يحقق من خلال ذلك أكبر ربح ممكن؟</p>															

والمشكلة بهذه الصيغة هي في صورة نموذج تقضي أرباح نمطي للبرمجة الخطية وهي التي تمثل المطلوب الأول في المثال السابق.

سادساً - استخدام إحدى الطرق للبرمجة الخطية وهي على النحو الآتي:

1- طريقة التحليل البياني.

2- طريقة السيمبليكس (العامة).

هذا وسوف يتم استخدام هذه الطرق بعد إعطاء فكرة عامة وأمثلة عن كيفية وضع أو بناء المشكلة في صورتها النهائية. أما بالنسبة للمطلوب الثاني والثالث والرابع في هذا المثال سوف نحدد حلها في ما بعد. والجدول (3 - 3) يبين بعض الأمثلة لكيفية إيجاد التكوين النهائي لمشكلة البرمجة الخطية للقيمة العظمى وهي تمثل بعض الاستخدامات للبرمجة الخطية في مختلف المجالات:

ثانياً - تحديد المتغيرات التي تؤثر على هذه المشكلة Determining the Variables. وهي تعمل في الطاقة المحدودة والمتاحة ومنطقة الإمكانات.

هذه المشكلة يوجد فيها متغيران وهما تحديد الكيلوغرامات التي يجب إنتاجها من المعلقين.

عدد الكيلوغرامات التي يمكن إنتاجها من الملف الأول  $A =$   
عدد الكيلوغرامات التي يمكن إنتاجها من الملف الثاني  $B =$

ثالثاً - تحديد دالة الهدف والتعبير عنها في صورة معادلة رياضية Determining the Objective Function

الهدف في هذه الحالة هو البحث عن كيفية تخفيض التكاليف. وحيث إن الكيلوغرام من الملف الأول تكلفته 4 دنانير، والملف الثاني تكلفته 6 دنانير للكيلوغرام الواحد، فإن دالة الهدف تكون كالآتي:

$$\text{دالة الهدف } \text{Min. } Z = 4A + 6B \text{ (القيمة الصغرى)}$$

ويجب أن يتحقق هذا الهدف في ظل شروط تحقيق الحد الأدنى المطلوبة في وحدة التغذية من بروتينات وبيوتاسيوم وكالسيوم.

رابعاً - تحديد الحدود والمقيدات في المشكلة والتعبير عنها في شكل متباينات Determining Constraints

وحيث إن الحد الأدنى المطلوب من البروتينات هو 9 وحدات/وحدة غذائية. وحيث إن الوحدة من A تحتوي على 3 وحدات من البروتين، والوحدة من B تحتوي على وحدة واحدة من البروتين، فإن معادلة البروتينات تكون كالآتي:

$$3A + B \geq 9$$

وبلاحظ أن إشارة التباين تتطلب أن لا يقل (أكثر من أو يساوي) كمية البروتينات في المزيج عن 9 وحدات. حيث تمثل هذه الكمية الحد الأدنى المطلوب توافره. وينفس الممثل نجد أن معادلة الأملاح والبيوتاسيوم تكون كالآتي:

$$A + 2B \geq 8 \text{ أملاح البرتاسيوم}$$

$$A + 6B \geq 12 \text{ أملاح الكالسيوم}$$

خامساً - التكوين النهائي للمشكلة Final formulation الرياضية لمشكلة النموذج النمطي للبرمجة الخطية

## II - تكوين المشكلة في حالة القيمة الصغرى

• مثال (2) لتأخذ المثال التالي لتوضيح الخطوات الأساسية للبرمجة الخطية. نفرض أن إدارة مشروع للبرية الحيوانية ترغب في اتخاذ قرار للتوصل إلى مزيج معين من علف الحيوان وهذا المزيج مركب من مادتين غذائيتين، بحيث أن يتحقق هذا المزيج الشروط الأساسية للتغذية المعالية وبأقل تكلفة ممكنة. ونفرض أن الشروط الأساسية المطلوبة لكل مادة (وحدة التغذية) يجب أن تتحقق فيه كحد أدنى من العناصر التالية:

بروتينات	9 وحدات
أملاح البيوتاسيوم	8 وحدات
أملاح الكالسيوم	12 وحدة

وبافتراض أن الملف الأول من المادة الغذائية يحتوي على 3 وحدات من البروتينات ووحدة واحدة من أملاح البيوتاسيوم والكالسيوم، وتبلغ تكلفته 4 دنانير للكيلوغرام الواحد من الملف. أما بالنسبة للملف الثاني فإنه يحتوي على وحدة واحدة من البروتينات ووحدين من أملاح البيوتاسيوم و6 وحدات من أملاح الكالسيوم، وتبلغ تكلفته 6 دنانير للكيلوغرام الواحد من الملف. وترغب إدارة المشروع تحديد المزيج الأمثل من المعلقين بحيث تتحقق فيه الشروط الأساسية المطلوبة وبأقل تكلفة ممكنة.

• الحل

المعلومات المتوفرة في المثال يمكن تلخيصها في الجدول (4 - 3).

جدول (4 - 3) ملخص للمشكلة

محتويات المادة الغذائية	أنواع الأعلاف		بروتينات	أملاح البيوتاسيوم	أملاح الكالسيوم	تكلفة الكيلوغرام الواحد
	الملف الأول	الملف الثاني				
المادة الغذائية						
9		1	3	1	1	4
8		2	1	1	1	4
12		6	1	1	1	4
		6				

• التعليق

أولاً - تحديد طبيعة المشكلة (تحديد الهدف) Determining the Nature of the Problem (Determining Objective)

في هذا المثال نجد أن المشكلة تتعلق بالقيمة الصغرى، وهي كيفية الوصول إلى الهدف بأقل تكلفة ممكنة.



من خلال الخطوات السابقة يمكن تحديد الصيغة الرياضية للمشكلة بالكامل وهي كالآتي:

دالة الهدف	$\text{Min. } Z = 4A + 6B$ (القيمة الصغرى)
القيود	$3A + B \geq 9$ بروتينات $A + 2B \geq 8$ أملاح اليوتاسيوم $A + 6B \geq 12$ أملاح الكالسيوم $A, B \geq 0$ شروط عدم السلبية

لاحظ أن علامات التباين الخاصة بالقيود لمشكلة القيمة الصغرى هي عكس التباين في مشكلة القيمة العظمى السابقة (مثال رقم 1)، وهذه تعتبر قاعدة عامة في النموذج الخطي للبرمجة الخطية.

والجدول (5 - 3) يبين بعض الأمثلة لكيفية إيجاد التكوين النهائي لمشكلة البرمجة الخطية للقيمة الصغرى وهي تمثل بعض الاستخدامات للبرمجة الخطية في مختلف المجالات:

جدول (5 - 3) أمثلة لكيفية إيجاد التكوين النهائي لمشكلة البرمجة الخطية للقيمة الصغرى	المشكلة	التكوين النهائي للمشكلة
(1) يرغب مزارع في شراء كمية من علف الدواجن بحيث تحتوي الكمية المشتركة على الموارد الضرورية للنمو $(X_1, X_2, X_3)$ . الحد الأدنى للكمية الغذائية حسب الجدول التالي:	دالة الهدف	$\text{Min. } Z = 200y_1 + 300y_2$
	القيود	$4y_1 + 10y_2 \geq 90$ المادة الأولى $5y_1 + 3y_2 \geq 48$ المادة الثانية $5y_1 + 0y_2 \geq 15$ المادة الثالثة $2y_1 + y_2 \geq 20$ المادة الرابعة $y_1, y_2 \geq 0$ شروط السلبية
فإذا كان هناك صنفان من العلف وكل صنف يحتوي على الموارد الغذائية حسب المعلومات التالية:		
المادة الغذائية	$x_1$ $x_2$ $x_3$ $x_4$	$x_1$ $x_2$ $x_3$ $x_4$
المحتويات من المادة الغذائية		

## التكوين النهائي للمشكلة

### المشكلة

صنف A	4	5	5	2
صنف B	10	3	0	1

مع العلم بأن سعر الشراء للصنف A = 200 درهم والصنف B = 300 درهم.

المطلوب/ بناء النموذج الرياضي على شكل برمجة خطية لكمية العلف المطلوب وتأمل التكاليف؟

دالة الهدف  $\text{Min. } Z = 2X_1 + 4X_2$

شروط وتقيود المشكلة

$$X_1 \leq 50$$

$$X_2 \geq 100$$

$$X_1 + X_2 = 200$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

دالة الهدف  $\text{Min. } Z = 0.04A + 0.13B + 0.40C$

شروط وتقيود المشكلة

$$A + B + C \geq 20000$$

$$0.372A - 0.007B - 0.006C \geq 0$$

$$0.368A - 0.001B - 0.01C \leq 0$$

$$0.22A + 0.13B - 0.28C \leq 0$$

$$0.05A + 0.03B - 0.03C \geq 0$$

$$A, B, C \geq 0$$

شروط عدم السلبية

وإن الخلطة يجب أن تحتوي على 1- على الأقل 8٪ كالسيوم على أن لا تزيد النسبة عن 1.2٪.

2- على الأقل 22٪ بروتين.

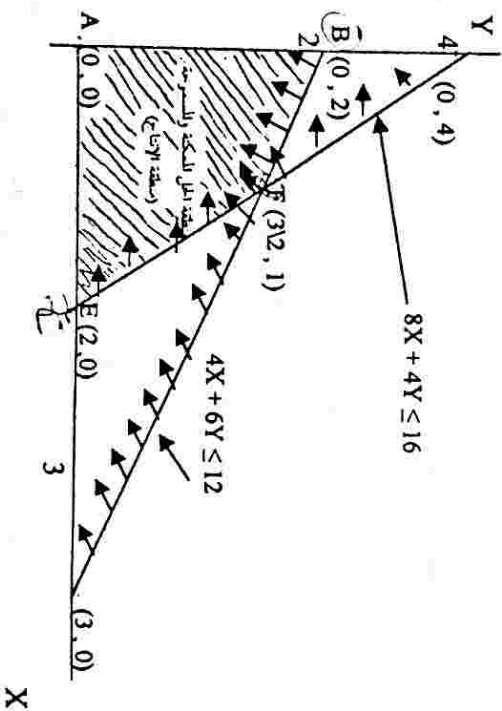
3- على الأكثر 5٪ فيثامينات.

المطلوب/ بناء نموذج البرمجة الخطية لهذه المشكلة؟

سيستخدم في إنتاج الدراجات العادية فقط. أي بمعنى تحول كل متبينة إلى معادلة بافتراض استخدام كل الطاقة الإنتاجية في إنتاج إحدى السليتين. فإذا كانت  $x = 0$  فإن  $y$  تساوي  $\frac{16}{4}$ ، وتساوي 2 دراجة نارية، وبذلك فإن هذه النقطة، والتي تمثل الرأس الأول للخط الذي يمثل معادلة القيد الأول هي (0, 2). أما إذا كانت  $y = 0$  فإن  $x$  تساوي  $\frac{16}{8}$ ، وتساوي 3 دراجة عادية، وبذلك فإن هذه النقطة، والتي تمثل الرأس الثاني للخط، الذي يمثل معادلة القيد الأول هي (3, 0). أنظر إلى الرسم البياني الذي يبين ذلك، في هذا الرسم، والذي يبين الخط المستقيم للمعادلة الأولى، وبما أن إشارة هذه المعادلة أقل أو تساوي  $\leq$  وهذا يعني أن الاتجاه المسموح به هو كل النقاط التي تقع على الخط المستقيم وكل النقاط الأخرى التي تقع أسفل هذا الخط بحيث نجد أن المنطقة المسموحة تمثل المثلث الذي يقع على المنطقة الموجهة الواقعة على اليمين.

بالنسبة للمتبينة الثانية  $8x + 4y \leq 16$  تستخدم فيها نفس الإجراءات التي اتبعناها في المعادلة الأولى، وذلك بافتراض أن الطاقة الإنتاجية لسلمة معينة = صفر ومنه نستطيع الحصول على قيمة السلمة الأخرى وبالعكس. بافتراض أن  $x = 0$  إذا  $y = \frac{16}{4} = 4$  ومعنى ذلك بأن هذه النقطة تساوي (0, 4) وبافتراض أن  $y = 0$  إذا  $x = \frac{16}{8} = 2$  (وهذا يعني بأن النقطة على الرسم تمثل قيمة كل من  $(x, y) = (2, 0)$  في الحالة الثانية.

الرسم البياني (3 - 1)



ونظراً لأن إتمام عملية الإنتاج تتطلب مرور كل من الدراجات العادية والنارية في المرحلة الآلية واليدوية، فإن المنطقة التي تحتوي على الحلول تنتج في الشكل الرباعي

## • طرق البرمجة الخطية

- 1- طريقة التحليل البياني.
- 2- طريقة السمبليكس (العامة).

### 1- طريقة التحليل البياني Graphical Analysis Method

يتميز الحل لمشكلة البرمجة الخطية بالسهولة والوضوح والسرعة، إذ إننا بالنظر إلى الرسم البياني الذي تمثل فيه جميع الشروط والمتغيرات يمكننا أن نجد الحلول المختلفة للمشكلة وأن نقارن القيم التي تتخذها الدالة الهدفية في هذه الحلول، بمعنى نقارن الأرباح والإيرادات أو التكاليف عند هذه الحلول المقارنة. إلا أنه لا يمكننا الحصول على الحل البياني للمشكلة إلا إذا كان هناك متغيران أو ثلاثة على أكثر تقدير، حيث إننا نجد من المستحيل رسم وتقييم رسم بياني ذي أربعة جوانب أساسية (وهي متغيرات المشكلة لكل متغير جانبي) وبالطبع إذا ما زاد عدد المتغيرات عن ثلاثة فيمكن استخدام الطريقة الجبرية أو طريقة السمبليكس Simplex Method.

### 1- استخدام طريقة التحليل البياني لحل مشكلة القيمة المظني

ففي مثالنا رقم (1) السابق يمكن استخدام معادلات التكوين النهائي وحلها عن طريق استخدام طريقة التحليل البياني، لأنه يوجد متغيران فقط في هذا المثال. والمعادلات هي كالآتي:

دالة الهدف	$\text{Max. } Z = 10x + 30y$ (القيمة الكبرى)
القيود	$4x + 6y \leq 12$
	$8x + 4y \leq 16$
	شرط عدم السلبية
	$x, y \geq 0$

الآن يمكن أن نبدأ بتحويل الدراجات النارية على المحور العمودي والدراجات العادية على المحور الأفقي، ونعتبر عن القيود في شكل خطوط مستقيمة تصل بين نقطتين واحدة على المحور العمودي والأخرى على المحور الأفقي، كما هو مبين في الرسم البياني (3 - 1). والآن يمكن تحليل المتباينات السابقة في هذا المثال على النحو التالي:

بالنسبة للمتبينة الأولى  $4x + 6y \leq 12$  فإنه يمكن رسمها بافتراض، أولاً: - أننا سوف لن ننتج شيئاً من الدراجات العادية  $x = 0$ ، وبالتالي فإن كل الوقت المتاحة (12 ساعة) سوف يستخدم في إنتاج الدراجات النارية  $x$  ذلك سنفترض أننا لن ننتج شيئاً من الدراجات النارية،  $y = 0$  فقط. وبعد وبالتالي فإن كل الوقت المتاحة (12 ساعة)

مرة أخرى عند التعرض لأسلوب السبيليس كآداة أخرى لاتخاذ القرارات. ونلاحظ عند تعريف قيم هذه النقطة في معادلات القيود تكون كالآتي:

$$\begin{aligned} 4X + 6y &\leq 12 &= 4(0) + 6(0) &\leq 12 \\ 8X + 4y &\leq 16 &= 8(0) + 4(0) &\leq 16 \end{aligned}$$

$$x, y \geq 0$$

• التعويض بقيم النقطة (B) (0,2):

$$\text{Max } Z = 10x + 30y = 10(0) + 30(2) = 60$$

نلاحظ أن الحل عند هذه النقطة أفضل من الحل عند النقطة السابقة، حيث ارتفعت الأرباح من صفر إلى 60 ديناراً. مع ملاحظة أن الحل عند هذه النقطة هو الآخر يرضى معادلي القيود وشرط عدم السلبية.

• التعويض بقيم النقطة (E) (2,0):

$$\text{Max } Z = 10x + 30y = 10(2) + 30(0) = 20$$

نلاحظ أن هذه النقطة هي أفضل من النقطة A بينما النقطة B هي أفضل منها. فنجد الأرباح عند هذه النقطة تساوي 20 ديناراً، ومع ذلك فإن هذا الحل لم يخرج أيضاً من معادلي القيود وشرط عدم السلبية.

• التعويض بقيم النقطة (F) (1, 1/2):

إيجاد قيمة الأرباح عند هذه النقطة F نحتاج أولاً إلى إيجاد الحل عند هذه النقطة، ويمكن تحديد قيمة الحل عندما:

1- إما بإسقاط خط عمودي على محور السينات، وخط عمودي على محور الصادات، وذلك انطلاقاً من النقطة F والنقطتين اللتين يمس فيهما هذه الأعمدة لمحور السينات والصادات، اللذين يمثلان عدد الوحدات التي يجب إنتاجها من الدراجات الحادية والثانية.

2- إما أن يتم حل معادلي القيود آنياً، أي في آن واحد، وحتى يتم ذلك نفترض حالة التساوي بين الطرف الأيمن والأيسر في كل من معادلي القيود، لأن ذلك المعادلتين تلقيناً في نقطة واحدة هي F. ويمكن تحليل المعادلتين كالآتي:

$$4x + 6y = 12 \quad 8x + 4y = 16$$

يمكن وضعة المعادلتين في حالة التساوي كما يلي:

$$\begin{aligned} 4x + 6y &= 12 \\ 8x + 4y &= 16 \end{aligned}$$

الذي تشترك فيه المشيكتان الأولى والثانية، والتي تحدد المخاط أو الميزج السلمي الذي يحقق أقصى ربح ممكن. وبعد تحديد النقاط على الرسم البياني نصل إلى المنطقة المحددة والمحصورة في الشكل الرباعي (A,B,F,E)، ومن خلال هذا المضلع يمكن تحديد الحلول الأساسية وهي النقاط التي تقع على رؤوس الشكل الرباعي والتي تحدد منطقة الإنتاج الممكنة، ويتعويض قيم هذه النقاط على معادلة دالة الهدف، ومن خلال القيم الناتجة يمكن أن نحدد الحل الأمثل وهو الذي يمثل أعلى قيمة (أعلى ربح).

كما نلاحظ بأن الشكل (A,B,F,E) يمثل منطقة الحل الممكنة، بمعنى أن كل الحلول التي تقع بداخله وعلى محيطه تمثل حلول ممكنة Feasible Solution Area ومسوحة، لأن أية تشكيلة إنتاجية من (x,y) داخل هذه المنطقة وعلى محيطها لن تتطلب أكثر من الطاقة الإنتاجية المتاحة في المرحلة الآلية والطاقة الإنتاجية في المرحلة اليدوية. ويمكنك الآن إجراء بعض التجارب على النقاط الواقعة بداخل وعلى محيط المضلع للتأكد من ذلك.

الآن في المثال رقم (1) نستطيع أن نضع الإجابة للمطلوب الثاني، ويمكن أن نتساءل ما هي النقطة التي تمثل الحل الأمثل؟ وكيف يتم تحديدها؟ يمكن الإجابة على هذا كالآتي:

الإجابة تكون عن طريق:

1- التعويض في دالة الهدف والحصول على قيمة Z.

2- إحصار (ميل) دالة الهدف. وذلك عن طريق تحريك منحنى دالة الهدف إلى أعلى حتى يلامس رأس المضلع من أعلى فتتمثل هذه النقطة هي نقطة الحل الأمثل.

1- من طريق التعويض في دالة الهدف:

نحدد إحداثيات النقاط الطرفية (رؤوس المضلع) في منطقة الحل ونعوض قيم الإحداثيات بـ x,y في دالة الهدف وهي كالآتي:

$$\text{Max. } Z = 10x + 30y \quad (\text{القيمة الكبرى})$$

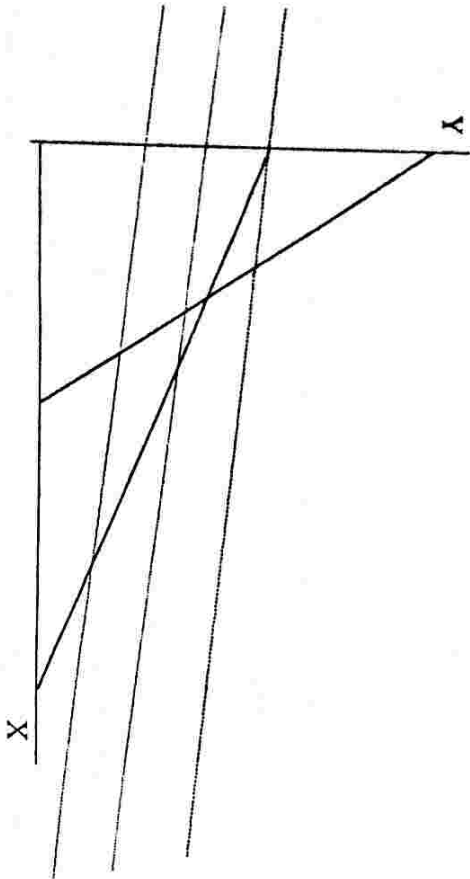
• التعويض بقيم النقطة (A) (0,0):

$$\text{Max. } Z = 10x + 30y = 10(0) + 30(0) = 0$$

الربح عند النقطة (A) يساوي صفراً، وذلك لعدم وجود الإنتاج في هذه النقطة، بمعنى أن المشروع لم يبدأ في العمليات الإنتاجية. ولكن مع ذلك فإن الحل يرضى معادلي القيود وشرط عدم السلبية. ويسمى الحل عند هذه النقطة بالحل المبني الممكن Initial Basic Feasible Solution، ولكن هذا الحل ليس له معنى من الناحية الاقتصادية، حيث ليس من المعقول أن يبقى هذا المشروع متوقفاً دون إنتاج، وهذا الحل سوف يتكرر

الناتج المتساوي في شأن تحديد توازن المنتج أو بدور منحنيات السواء في شأن تحديد توازن المستهلك. ففي الحالة الأولى يرغب المنتج في التوصل إلى أعلى منحنى للناتج المتساوي بـمس حدود الإمكانيات الإنتاجية. وفي الحالة الثانية يرغب المستهلك التوصل إلى أعلى منحنى سواء بـمس حدود إمكانيات ميزانيته. وفي كلا الحالتين فإن أفضل النقاط الممكنة هي نقطة التماس. وكما أن خريطة منحنيات السواء تتكون من عائلة لا نهائية العدد من هذه المنحنيات المتوازية وغير المتقاطعة فإن دالة الهدف تتكون من عائلة من الخطوط المستقيمة المتوازية وغير المتقاطعة. وعن طريق افتراض أرباح معينة واستخدام طريقة الخطأ والتجربة عن دالة الهدف، الرسم البياني (2-3) يبين ذلك. ولكن هذه الطريقة غير مضمونة للوصول إلى الحل الأمثل.

الرسم البياني (2-3)



- الإجابة على المطلوب الثالث في المثال رقم (1). إيجاد عدد الساعات غير المستغلة وفي أية مرحلة إن وجدت؟ بما أن الحل هو عند النقطة B والتي تبين أن عدد الوحدات التي يجب إنتاجها من الدرجات العادية تساوي صفراً (أي بمعنى يجب ألا ننتج من هذه السلعة  $x = 0$ )، وأن عدد الوحدات التي يجب إنتاجها من الدرجات النارية يساوي وحدتين فقط ( $y = 2$ ). والتعويض عن هذه الكميات في معادلات القيود:

بضرب المعادلة الأولى في 2 ثم طرح المعادلة الثانية منها يكون الناتج كالآتي:

$$2(4x + 6y) = 2(12)$$

طرح المعادلتين ببعضهما البعض

$$8x + 12y = 24$$

$$8x + 4y = 16$$

$$0 + 8y = 8$$

إذاً:

$$8y = 8 \Rightarrow$$

$$y = \frac{8}{8} = 1$$

والآن يمكن التعويض في أية معادلة الأولى أو الثانية عن قيمة y بما يساويها ونستنتج قيمة x وهي كالآتي:

المعادلة الأولى

$$4x + 6(1) = 12 \Rightarrow 4x + 6 = 12 \Rightarrow 4x = -6 + 12 \Rightarrow 4x = 6$$

$$x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

المعادلة الثانية

$$8x + 4y = 16 \Rightarrow 8x + 4(1) = 16 \Rightarrow 8x + 4 = 16 \Rightarrow$$

$$8x = -4 + 16 \Rightarrow 8x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

بعد التحليل السابق قيمة  $x = \frac{3}{2}, y = 1$  عند النقطة F. ولأنه يمكن تعريف هذه القيمة في دالة الهدف لكي نحصل على الأرباح عند هذه النقطة:

$$Max. Z = 10x + 30y = 10(\frac{3}{2}) + 30(1) = 45$$

نلاحظ أن هذه النقطة لا تمثل الحل الأمثل لأنها أقل من النقطة B.

نستنتج من خلال هذه التحاليل السابقة بأن أعلى قيمة تمثل أعلى ربح يمكن تحقيقه تكون عند النقطة B وقيم هذه النقطة (0,2). إذاً يجب على المشروع عدم الإنتاج من السلعة الأولى وهي الدرجات العادية ويجب أن ينتج وحدتين من الدرجات النارية. وبعث أعلى ربح من ذلك الإنتاج قدره 60 ديناراً.

2- إيجاد الحل عن طريق منحنى دالة الهدف [عن طريق انحدار (ميل) دالة الهدف].

والواقع أن دالة الهدف (أقصى ربح) في نموذج البرمجة الخطية تقوم بدور منحنيات

إذاً هناك طاقة إنتاجية ضائعة أو غير مستغلة في المعادلة الأولى والتي تمثل المرحلة الآلية وقدرها 4 ساعات عمل.

## II - استخدام طريقة التحليل البياني لحل مشكلة القيمة الصغرى

في مثالنا رقم (2) السابق يمكن استخدام معادلات التكوين النهائي وحلها عن طريق استخدام طريقة التحليل البياني، لأنه لا يوجد بها متغيران. والمعادلات هي كالآتي:

دالة الهدف:  $\text{Min } Z = 4A + 6B$  (القيمة الكبرى)

القيود:

$$3A + B \geq 9$$

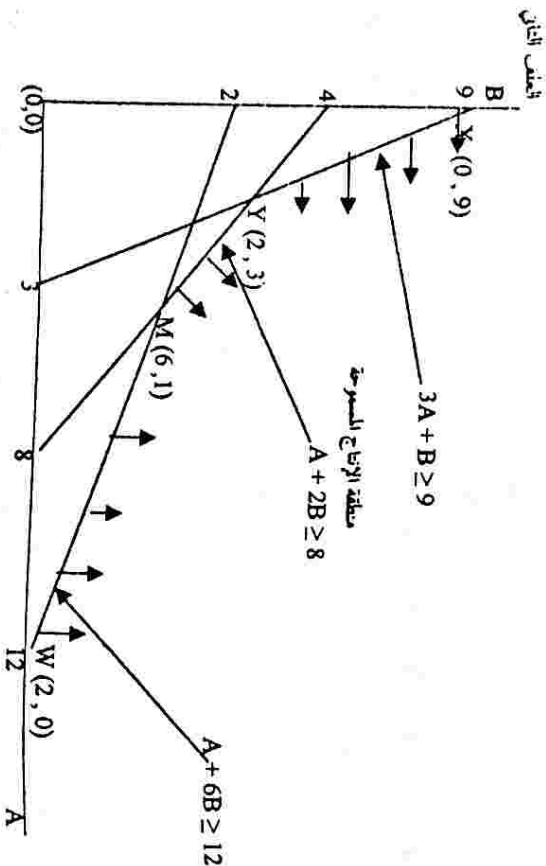
$$A + 2B \geq 8$$

$$A + 6B \geq 12$$

$$A, B \geq 0$$

شرط عدم السلبية

ويمكن الآن إظهارها بيانياً برسم المتساويات في القيود على الرسم البياني (3-3):  
الرسم البياني (3-3)



$$4X + 6Y \leq 12 \quad = \quad 4(0) + 6(2) = 12$$

$$8X + 4Y \leq 16 \quad = \quad 8(0) + 4(2) = 8$$

16 ساعة الطاقة المتاحة في المرحلة البدوية  
8 ساعات الطاقة المستغلة في المرحلة البدوية

8 ساعات الطاقة الضائعة أو غير المستغلة

إذاً هناك طاقة إنتاجية ضائعة أو غير مستغلة في المعادلة الثانية والتي تمثل المرحلة البدوية وقدرها 8 ساعات عمل.

• الإجابة على المطلوب الرابع في المثال رقم (1). ما هو القرار الأمثل الذي يجب اتخاذه إذا تغيرت أرباح السلعتين كان أصبح المشروع يحقق ربحاً قدره 30 ديناراً عن الدراجة العادية و10 دينار عن الدراجة النارية (اجتبار الحسابية)؟

إذا تغيرت دالة الهدف أصبحت كالآتي:

دالة الهدف  $\text{Max } Z = 30x + 10y$  (القيمة الكبرى)

$\text{Max } Z \text{ at Point } A(0,0) = 30(0) + 10(0) = 0$

$\text{Max } Z \text{ at point } B(0,2) = 30(0) + 10(2) = 20$

$\text{Max } Z \text{ at point } E(2,0) = 30(2) + 10(0) = 60$

$\text{Max } Z \text{ at point } F(\frac{3}{2}, 1) = 30(\frac{3}{2}) + 10(1) = 55$

في هذه الحالة، أفضل قرار يتم اتخاذه هو عند النقطة E والتي يجب فيها المشروع أن ينتج وحدتين من الدراجات العادية وعدم إنتاج أية وحدة من الدراجات النارية، بحيث يحقق المشروع ربحاً وقدره 60 ديناراً. ملاحظة: لقد تغيرت النقطة من B إلى E والربح كان متساوياً في كلا النقطتين يساوي 60 ديناراً. أما بالنسبة لإيجاد عدد الساعات غير المستغلة وفي أية مرحلة إن وجدت، فيمكن التعويض عن هذه الكميات في معادلات القيود.

$$4X + 6Y \leq 12 \quad = \quad 4(2) + 6(0) = 8$$

$$8X + 4Y \leq 16 \quad = \quad 8(2) + 4(0) = 16$$

12 ساعة الطاقة المتاحة في المرحلة الآلية  
8 ساعات الطاقة المستغلة في المرحلة الآلية

4 ساعات الطاقة الضائعة أو غير المستغلة

الآن يمكن التعويض في دالة الهدف بهذه القيم :

$$\text{Min. } Z = 4A + 6B = 4(2) + 6(3) = 26$$

● النقطة M (6,1)

يمكن تحديد قيم النقطة M بنفس الإجراءات السابقة وذلك عن طريق المعادلتين التاليتين :

$$A + 6B \geq 12$$

$$A + 2B \geq 8$$

بطرح المعادلة الأولى من الثانية يكون الناتج كالآتي :

$$A + 6B \geq 12$$

$$A + 2B \geq 8$$

$$0 + 4B = 4$$

إذا  $(B = \frac{4}{4} = 1)$  ويمكن تحديد قيمة A عن طريق تعويض قيمة B في أية معادلة

من المعادلات السابقة. مثلاً في المعادلة التالية :

$$A + 6B \geq 12 \quad A + 6(1) = 12 \quad A = 6$$

إذا النقطة M تساوي (6,1) وتعويض (A,B) للنقطة M بدالة الهدف يكون الناتج كالآتي :

$$\text{Min. } Z = 4A + 6B = 4(6) + (1) = 30$$

● النقطة W (12, 0) : تعويض هذه القيم في دالة الهدف .

$$\text{Min. } Z = 4A + 6B = 4(12) + 6(0) = 48$$

يمكن تلخيص النتائج السابقة في الجدول (6 - 3).

جدول (6 - 3) ملخص للنتائج النهائية

النقطة	A	B	القيم (التكاليف)
X	0	9	54
Y	2	3	26
M	6	1	30
W	12	0	48

في هذه الحالة، أفضل قرار يتم اتخاذه هو عند النقطة Y والتي يجب فيها المشروع

من الرسم البياني السابق نستنتج الآتي :

1- منطقة الإنتاج المسموح بها لمشكلة القيمة الصغرى تقع أعلى تقاطع مستاويات القيود.

2- معادلات القيود يتطلب أن تزيد محتويات المزيج عن الحد الأدنى المطلوب توافره. في معادلة البروتينات مثلاً يتطلب أن تزيد محتويات مزيج A,B من البروتينات عن 9 وحدات، وبالتالي نجد أن الشرط يتحقق بأية نقطة تقع فوق هذا الخط وعلى الخط نفسه. وهكذا بالنسبة لكل من القيدين الثاني والثالث.

والآن يمكن إيجاد الحل الأمثل عن طريق تعويض النقاط الركنية على دالة الهدف.

$$\text{دالة الهدف} \quad \text{Min. } Z = 4A + 6B \quad (\text{القيمة الصغرى})$$

● النقطة X (0,9)

$$\text{Min. } Z = 4A + 6B = 40(0) + 6(9) = 54$$

● النقطة Y (2,3)

يمكن إيجاد قيم النقطة A,B عن طريق حل المعادلتين :

$$3A + B \geq 9$$

$$A + 2B \geq 8$$

لأن هاتين المعادلتين تتساويان عند النقطة Y بضرب المعادلة الأولى في 2 وطرحها من المعادلة الثانية يكون الناتج كالآتي :

$$2(3A + B) = 2(9)$$

$$6A + 2B = 18$$

$$8A + 2B = 8$$

$$5A + 0 = 10$$

إذا A تساوي  $\frac{10}{5} = 2$  وتعويض قيمة A في أي من المعادلتين نستطيع أن نتحصل على قيمة B وهي كالآتي : التعويض في المعادلة الأولى مثلاً :

$$3A + B \geq 9 = 3(2) + B = 9$$

$$6 + B = 9 = B = -6 + 9$$

$$\text{إذا } B = 3 \text{ وقيمة } A, B \text{ عند النقطة } Y \text{ تساوي } (2, 3)$$



دالة الهدف  $Max Z = 10x + 30y$  (القيمة الكبرى)

القيود

$$4x + 6y \leq 12$$

$$8x + 4y \leq 16$$

شرط عدم السلبية

$$x, y \geq 0.$$

ويتطلب الحل لهذه المشكلة مراعاة الأمور التالية :

1 - ضرورة تحويل متباينات القيود الموضوعية من اللامتساويات إلى متساويات، وذلك عن طريق إضافة ما يسمى بالمتغيرات الإضافية (Slack Variables) إلى كل اللامتساويات. والمتغيرات الإضافية عبارة عن قيم مجهولة، تضاف إلى الجانب الأيسر من اللامتساويات، لتحويلها إلى متساويات. وهي من الناحية العملية عبارة عن الطاقة غير المستغلة أو العاطلة داخل كل قسم من الأقسام الإنتاجية. ولكن في حالة ما تكون الإشارة (=) فهذا يعني أن الجانب الأيمن يساوي الجانب الأيسر من المعادلة ولا يوجد وقت غير مستغل أو ضائع. ولهذا ليس من الضروري إضافة المتغيرات المشوائية.

مثلاً القيد الأول للمرحلة الآلية نقول: أربع ساعات مفرقة في حجم الإنتاج للسلمة الأولى زائد ست ساعات مفرقة في حجم الإنتاج للسلمة الثانية ويجب أن تقل عن، أو تساوي على الأكثر، طاقة المرحلة الآلية التي هي طاقتها 12 ساعة. ونفرض أن حاصل جمع هذا الضرب كان أقل من طاقة المرحلة الآلية فمثلاً، فهذا يعني قطعاً أن المرحلة الآلية سوف تكون فيها طاقة عاطلة، أي أن الطاقة المتاحة في المرحلة سوف تساوي مجموع الاستخدامات في إنتاج السلمتين مضافاً إليها الطاقة العاطلة. وكذلك الأمر للمرحلة الثانية.

وإذا رمزنا للطاقة العاطلة أو غير المستغلة (SLACK) في المرحلة الآلية بالرمز S1 وللطاقة العاطلة في المرحلة اليدوية بالرمز S2 فإنه يمكن إعادة صياغة معادلات القيود كالآتي:

$$\text{المرحلة الآلية} \quad 4x + 6y + S1 + 0S2 = 12$$

$$\text{المرحلة اليدوية} \quad 8x + 4y + 0S1 + S2 = 16$$

ويطلق على S1, S2 بالمتغيرات الإضافية، أي متغيرات الطاقة العاطلة أو الزائدة عن الاستخدام. فإذا كان حجم الإنتاج الفعلي مثلاً  $y = 1, x = 1$ ، فإن الطاقة العاطلة في المرحلة الآلية S1 يمكن حسابها كالآتي:

$$4(1) + 6(1) + S1 = 12 \Rightarrow S1 = 12 - 4 - 6 = 2$$

$$S1 = 12 - 10 = 2$$

أن ينتج وحدتين من الملف الأول وإنتاج ثلاث وحدات من الملف الثاني بحيث يحقق المشروع أقل تكلفة وقدرها 26 ديناراً. أما عن إيجاد الحل عن طريق منحني دالة الهدف [عن طريق انحدار (ميل) دالة الهدف]، فيمكن افتراض قيم مختلفة في Z وسوف نجد الحل الذي نصل إليه هو نفس الحل الذي توصلنا إليه في المثال السابق.

## 2 - طريقة السيمبليكس (العامية) Simplex Method :

لقد سبق أن أوضحنا كيفية عمل طريقة الرسم البياني وبينت لنا بأن الحل الأمثل للمشكلة يقع في أحد الأركان. بينما تقوم الطريقة العامة بفحص هذه الأركان بطريقة منظمة للوصول إلى ذلك الحل الأمثل، وبالرغم من أنه يمكن استخدام الآلات الحاسبة أو الحاسب الآلي على نطاق واسع في ظل هذه الطريقة، فإنه من المهم أيضاً أن نتعرف على كيفية عمل هذه الطريقة حتى يمكن تفسير النتائج منطقياً. وتعتبر الطريقة العامة التي قدمها دانتزيج Dantzig سنة 1947 لحل مجموعة من مشاكل البرمجة الخطية أحد الاختصافات الرياضية الهامة للقرن العشرين، فهي كطريقة عامة تعتبر من أهم الطرق في هذا المجال وأكثرها كفاءة وفعالية. وقد ساهمت الأبحاث اللاحقة لتدريج وعدد كبير من الرواد والمفكرين الآخرين مثل كهن. S. L. و توكر. A. W. Tucker وشابلي Slapely وكارنس. A. Charles وغيرهم، في تطوير الطريقة وتحسينها ورفع مستوى كفاءتها والتغلب على بعض المشاكل التي كانت تحدث من سلامة تطبيقها.

وتقوم الطريقة العامة على مبادئ ومفاهيم رياضية متقدمة ومعقدة. غير أنه لا يلزم الإلمام بهذه المبادئ والمفاهيم لأغراض الإلمام بالطريقة ذاتها ومزاياها ودلائها. ولحسن الحظ، فهي كطريقة ذات منهجية رياضية منتظمة تركز إلى ما يسمى منهج الاستبعاد الكامل. لجاروس Gauss وجوردن Jordan وهذا النهج لا يستلزم خلفية رياضية متقدمة لاستيعابه بل يكفي الإلمام بقليل من القواعد الجبرية وقواعد جبر المصفوفات البسيطة.

تتميز هذه الطريقة بفاعليتها نظراً لقدرتها على حل النموذج البرمجي ولعدد غير محدود من المتغيرات، كما تتميز بإمكانيات برمجتها وذلك عن طريق استخدام الحاسب الآلي لإيجاد الحل الأمثل.

## 1 - استخدام طريقة السيمبليكس (العامية) لحل مشكلة القيمة العظمى

### ● الشكل المعياري للنموذج Standard Form

قبل البدء باستخدام الطريقة العامة لحل مشكلة العظمى، لابد من تحويل نموذج البرمجة الخطية إلى الشكل المعياري والذي يتناسب مع القواعد والإجراءات الجبرية المعنية لمشكلة البرمجة الخطية. ولقد كانت الصياغة الرياضية للمشكلة في المثال (1) على الصورة التالية:

وخاصة إذا كانت المشكلة هي مشكلة أقصى الأرباح أو المنافع المطلوبة.

ملاحظة - لعل من الواضح أنه لا يلزم في مشاكل البرمجة الخطية أن يتساوى عدد القيود مع عدد المتغيرات لدى مشكلة معينة. فقد يوجد في المشكلة عدد من الموارد محدودة المقدار أو القدرة يقل كثيراً أو قليلاً عن عدد المنتجات المطلوب اختيار التشكيلة المثالية من بينها.

## 2- بناء جدول الحل المبني للطريقة المبسطة Setting up The Initial Solution

بعد إضافة المتغيرات المعاطلة إلى كل من دالة الهدف وقيود المشكلة، وبالتالي تصبح المعادلات على الصورة التالية:

دالة الهدف:  $\text{Max } Z = 10x + 30y + 0S1 + 0S2$  (القيمة الكبرى)

القيود:

المرحلة الآلية  $4X + 6Y + S1 + 0S2 = 12$

المرحلة اليدوية  $8X + 4Y + 0S1 + S2 = 16$

شرط عدم السلبية:

$X, Y, S1, S2 \geq 0$

يوجد لدينا في هذه المشكلة أربعة متغيرات ومعادلتان بالإضافة إلى معادلة دالة الهدف. ففي حالة ما تكون طاقتي المرحلتين عاطلة بالكامل فسوف تكون النتيجة كالتالي: ساعة  $S1 = 12$ ,  $S2 = 16$ ,  $Z = 0$ ، وحيث إن  $S1, S2$  متغيرات غير أساسية في الحل الأساسي  $(X, Y)$ ، متغيرات أساسية، أي مساوية للصفر. نبدأ الآن بتكوين الجدول المبني حسب الطريقة العامة (السيمبليكس). وذلك عن طريق تحديد كل من دالة الهدف والمتساويات (القيود) من معاملاتها ووضعها على الصورة المبينة في الجدول (7-3):

جدول (7-3) الحل المبني الأول

	C	Basic	10	30	0	0	قيم الحل
		●	X	Y	S1	S2	RHS
	0		S1	4	6	1	12
	0		S2	8	4	0	16
			Z	0	0	0	0
		C-Z	10	10	0	0	

نلاحظ ما بداخل الجدول هو عبارة عن وجود مصفوفتين مصفوفتين في بعضهما البعض، الأولى هي المصفوفة المعطلة للمشكلة المراد حلها، والثانية عبارة عن مصفوفة

وسوف نفترض أن الطاقة ليس لها أي قيمة اقتصادية موجبة أو سالبة، بمعنى أنه لا ينتج عنها أرباح مباشرة كما لا يستدعي وجودها تكاليف مضافة متغيرة. وبذلك يكون الربح للوحدة من  $S1 = 0$  والربح للوحدة من  $S2 = 0$  وإذا ما أضفنا هذين إلى الصيغة الأصلية للمشكلة، مع إكمال القيود التفاضلية مؤثراً أصبحت المشكلة كالتالي:

دالة الهدف  $\text{Max } Z = 10x + 30y + 0S1 + 0S2$  المرحلة الآلية

المرحلة الآلية  $4x + 6y + S1 + 0S2 = 12$

المرحلة اليدوية  $8x + 4y + 0S1 + S2 = 16$

شروط عدم السلبية

$X, Y \geq 0$

ولاشك أنه إذا لم يتم المشروع بإنتاج أي شيء، أي بإنتاج  $X = 0$ ,  $Y = 0$ ، فإن الطاقة المعاطلة في المرحلة الآلية سوف تكون كالتالي:

12 الطاقة المتاحة

0 الطاقة المستغلة

12 الطاقة الغير مستغلة

إذا  $S1 = 12$  ساعة، بينما في المرحلة اليدوية تكون  $S2 = 16$  ساعة. ونحصل على الحل الأساسي الأول (حيث لا إنتاج والطاقت المتاحة عاطلة بالكامل) جريباً بحل قيدي للمرحلتين آتياً للطاقة المعاطلة وهي كالتالي:

$S1 = 12 = 4X - 6Y - 0S2$

$S2 = 16 = 8X - 4Y - 0S1$

ولذا ما عرضنا عن حجم الإنتاج لكل من  $x, y = 0$  في المعادلات السابقة (دالة الهدف ومعادلة القيود) لوجدنا:

$Z = 4(0) + 6(0) + 0(S1) + 0(S2) = 0$

$S1 = 12 - 4(0) - 6(0) - 0S2 = 12$

$S2 = 16 - 8(0) - 4(0) - 0S1 = 16$

وعادة ما يكون الحل الأساسي الأول الذي هو أحد سمات نموذج البرمجة الخطية متمثلاً في نقطة الصفر في دالة الهدف، حيث لا أرباح، والطاقة المتاحة عاطلة بالكامل،

## جدول (8 - 3) حساب المعاملات

المتغير	الربح/الوحدة	الربح/الوحدة	Z	(C-Z) الربح/الوحدة
X	10	$(4*0 + 8*0)$	0	10
Y	30	$(6*0 + 4*0)$	0	30
S1	0	$(1*0 + 0*0)$	0	0
S2	0	$(0*0 + 1*0)$	0	0

### II - حساب الصف (C-Z)

تقوم بطرح حصة ضرب في الخطوات السابقة من معامل المتغير في الصف C وهو صف الهدف. أي من ربح المتغير في دالة الهدف، ونضع حصة الطرح أسفل عمود معاملات المتغير المعين، أي في وصف المؤثرات (C-Z) وهي مبنية في الجدول (8 - 3). بالنسبة (RHS) نقوم بـ ضرب العمود C في العمود (RHS) ونضع حصة ضرب في أسفل العمود في صف Z. ونوضح هذا الرقم حصة الأرباح أو العائد الذي تحقق بالحل الأساسي، ففي حالة الجدول المبني دائماً يكون الناتج يساوي صفراً  $[16*0 = 0]$ .

### 4 - كيفية تحديد العمود الأمثل (Optimum Column) والصف الأمثل (Optimum Row)

1- تحديد العمود الأمثل - إذا وجدت في الصف (C-Z) أرقاماً موجبة في ما عدا العمود (RHS) فيجب اختيار أكبر القيم، ونميز هذا العمود الذي يقع في قاعدته هذا الرقم وهو يعتبر العمود الأمثل، وقد ميزناه بسهم في جدول الحل الأساسي الأول. ففي حالة عدم وجود أرقام موجبة في الصف (C-Z)، في ما عدا العمود (RHS)، فهذا يعني بأننا توصلنا إلى الحل الأساسي الأمثل في حالة ما تكون المشكلة هي البحث عن أعلى ربح ممكن. والواقع أن تطبيق هذه القاعدة على الحل الأساسي الأول يعني اختيار السلسلة التي تحقق أعلى ربح لإدخالها في برنامج الإنتاج، أي في متغيرات الحل الأساسي. ففي مثالنا السابق وجدنا بأن Y هو المتغير الأكثر ربحية والذي يصبح من الواجب تقديمه أو استبداله السابق وجداً بأن Y هو المتغير الأكثر ربحية والذي يصبح من الواجب تقديمه أو استبداله عدد الوحدات الواجب إدخالها في الحل الأساسي لهذا المتغير.

ب - تحديد الصف الأمثل - يتم حساب النسبة الموجهة بين عناصر العمود (RHS) في الحل الأساسي والعمود الأمثل (عمود البؤرة). ويتم اختيار النسبة التي تحمل أصغر نسبة، ثم تميز هذا الصف الذي تقع فيه هذه النسبة ويعمل هذا الصف بالصف الأمثل. ولا يعتد بالنسبة التي يكون فيها المقام مساوياً للصفر حيث إنها غير معروفة رياضياً، ولأنها تعني عدم وجود علاقة بين المتغير في العمود الأمثل والعمود (RHS).

الوحدة، التي تناظر الواحد في الأعداد الطبيعية. وهذا يعني أن إضافة المتغيرات العشوائية إلى الاستراتيجيات لن تؤثر على الحل النهائي للمشكلة، وهي فقط عبارة عن تحليل رياضي للحصول على الحل المبني الذي يعني أن قيم كل من (Y, X) مساوية للصفر.

ويمثل صف الهدف C في قمة الجدول معاملات المتغيرات في دالة الهدف، كما في دالة الهدف  $(Max Z = 10x + 30y + 0S1 + 0S2)$  فهي بالنسبة للمتغير  $X = 10$  والمتغير  $Y = 30$  كما يمثل العمود الأول المعنون C معاملات المتغيرات التي توجد في الحل الأساسي من دالة الهدف، فنجد أن معامل  $S1 = 0, S2 = 0$

ويمثل العمود المعنون (●) عمود متغيرات الحل الأساسي، وهي بالنسبة للحل الأساسي الأول المشكلة  $S1, S2 = 0$ .

ويمثل العمود (RHS) Right hand side قيم المتغيرات الموجودة في الحل الأساسي، فالمتغير  $S1 = 12, S2 = 16$ . ويمثل باقي الأرقام في المصفوفة تحت المتغيرات (X, Y, S1, S2) في الصفين الأول والثاني، معاملات الاستخدام من واقع معدلات القيد:

$$4X + 6Y + S1 + 0S2 = 12$$

$$8X + 4Y + 0S1 + S2 = 16$$

أما بالنسبة لعمود النسب فسوف يتضح منناه وكيفية الحصول عليه على الأرقام الظاهرة فيه حالاً. (القاعدة الثانية).

### 3 - كيفية الحصول على قيم الصف (C-Z):

يقوم صف المؤثرات (C-Z) مقام دقة السفينة في الطريقة العامة (السيمبليكس)، حيث يوجه إلى الخطوات التالية الواجب اتخاذها للوصول إلى الهدف المنشود. ويتم الحصول على الأرقام التي تظهر جبراً كالآتي:

#### I - حساب الصف Z

تقوم بـ ضرب معاملات الهدف للمتغيرات التي تظهر في الحل الأساسي كما تظهر في العمود C في العناصر المقابلة في كل عمود من أعمدة مصفوفة الاحتياجات (معاملات الاستخدام)، أي مصفوفة معاملات المتغيرات. فحاصل ضرب العمود C في أعمدة المعاملات، ويتم طريقة حساب هذه المعاملات كما في الجدول (8 - 3).

والخطوة التالية هي استكمال بقية قيم الجدول، لتحديد قيم الصف الثاني الجديد، وذلك عن طريق استخدام القانون التالي:

قيم الصف الثاني الجديد = عناصر الصف القديم - (نقطة تقاطع الصف القديم مع العمود الأمل X عناصر الصف الجديد)

جدول (3-11) حساب قيم الصف الثاني الجديد

عناصر الصف القديم	نقطة تقاطع الصف القديم مع العمود الأمل	عناصر الصف الجديد	قيم الصف الثاني الجديد
8-	(4)	$2/3$	$= 16/3$
4	(4)	1	$= 0$
0-	(4)	$1/6$	$= -2/3$
1-	(4)	0	$= 1$
16-	(4)	x	$= 8$

يمكن الآن إدراج هذه القيم في جدول الحل الأساسي (3-12) جدول (3-12) الحل الأساسي الثاني

C	Basic	10	30	0	0	قيم الحل
	•	X	Y	S1	S2	RHS
30	Y	$2/3$	1	$1/6$	0	2
0	S2	$16/3$	0	$-2/3$	1	8
	Z					
	C-Z					

يبقى إذن إيجاد معاملات دالة الهدف التي تقع إلى يمين Z وكذلك قيم (C-Z) وهي كما هو مبين في الجدول (3-13).

ويطبق هذه القاعدة على الحل في الجدول المبني نجد أن الصف الأمل هو صف S1، وقد ميزناه سهم. ويتقاطع الصف الأمل مع العمود الأمل عند عنصر يسمى (عنصر البؤرة Pivot Element) والذي يظهر محاطاً مربع في جدول الجدول المبني.

##### 5- الانتقال إلى الحل الأساسي الثاني:

بعد تحديد العمود والصف الأمل، تأتي مرحلة إيجاد قيم الصف الجديد المرتب على عملية الاستبدال، وذلك بقسمة جميع عناصر الصف الأمل على قيمة عنصر المرتكز أو البؤرة Pivot Element، والتي تساوي هذه القيمة (6)، وذلك لكي نصل إلى الصف الجديد الذي يحل محل الصف الأمل ويقع مكانه في جدول الحل الأساسي الجديد. ويحل المتغير Y الذي يرتبط بالعمود الأمل في الجدول السابق، محل المتغير في الصف الأمل عند تحديد متغيرات الحل الأساسي في الجدول الجديد. أي أن Y تحل محل S1 في العمود (6) (وهو عمود المتغيرات الموجودة في الحل) في جدول الحل الأساسي الثاني. كما تحل رتبة المتغير الموجود في الحل في (6) في العمود C محل الرتبة للمتغير المستبد (يحل رتبة Y محل رتبة S1) انظر الجدول (3-9).

جدول (3-9) الجدول المبني

C	Basic	10	30	0	0	قيم الحل
	•	X	Y	S1	S2	RHS
0	S1	4	6	1	0	12
0	S2	8	4	0	1	16
	Z	0	0	0	0	0
	C-Z	10	30	0	0	

قيم أو عناصر الصف الأول الجديد = جميع قيم الصف الأمل ÷ قيمة المرتكز أو البؤرة Pivot

عناصر الصف الجديد داخل الجدول (3-10)

C	Basic	10	30	0	0	قيم الحل
	•	X	Y	S1	S2	RHS
30	Y	$2/3$	1	$1/6$	0	2
0	S2					
	Z					
	C-Z					

- حدد العمود الأمثل، وهو الذي يقابل أكبر قيمة موزجة من معاملات الصف (C-Z).
- حدد الصف الأمثل الذي يجب استبداله، وهو عبارة عن الصف الذي يقابل أقل قيمة ناتجة من قسمة الطرف الأيمن للمساويات على عناصر العمود الأمثل.
- أوجد الصف الجديد الذي يحل محل الصف المستبدل.
- أوجد بقية الصفوف الأخرى التي تلي الصف الجديد المحدد، وذلك بطرح (عناصر الصف الجديد، مضروباً في نقط تقاطع الصفوف القديمة مع العمود الأمثل) من عناصر الصفوف القديمة.
- يكون الجدول الذي يتم التوصل إليه بعد الانتهاء من الخطوة السابقة، ممثلاً للحل الأفضل الذي بدىء في البحث عنه، إعتباراً من النقطة الأولى.
- 6- إنحصر الحل الذي تم التوصل إليه، لمعرفة ما إذا كان يمثل الحل الأمثل أم لا. فإذا كان نعم تكون المشكلة قد حلت، وإذا كان لا... كرر ما جاء في الخطوة (5)، ومكثاً حتى تفصل إلى الحل الأمثل.

## II - استخدام طريقة السيمبليكس (العامة) لحل مشكلة القيمة الصغرى

بعد دراسة ميكانيكية الطريقة العامة (السيمبليكس) في حل مشاكل البرمجة الخطية التي يكون الهدف فيها هو البحث عن القيمة العظمى Maximization أو أعلى ربح أو منافع ممكنة، فقد أصبح من الواجب علينا التعرف على هذه الميكانيكية في حالة ما إذا كان الهدف هو البحث عن أقل تكلفة أو تفصحية ممكنة. ذلك لأن العديد من مشاكل الحياة العملية يكون الهدف فيها هو اتخاذ قرار يتعلق بتخفيض التكاليف أو التفضيحات في سبيل تحقيق أهداف أو شروط أو منافع أخرى. لذلك نسوق المثال التالي (مثال 2 السابق):

$$\begin{aligned} \text{دالة الهدف: } \text{Min } Z &= 4A + 6B \quad (\text{القيمة الصغرى}) \\ \text{القيود: } 3A + B &\geq 9 \quad \text{بروتينات} \\ A + 2B &\geq 8 \quad \text{أملح البرناسيوم} \\ A + 6B &\geq 12 \quad \text{أملح الكالسيوم} \\ A, B &\geq 0 \quad \text{شروط عدم السلبية} \end{aligned}$$

### الحل

يتطلب حل هذا المثال بواسطة الطريقة العامة (السيمبليكس) تحويل المتباينات من اللامتساويات إلى متساويات. وذلك عن طريق إضافة المتغيرات الإضافية Slack Variable (المتغيرات الاصطناعية Artificial Variable أو الثانوية) إلى القيود ودالة الهدف. ولكن بفحص هذا المثال، نلاحظ أن هناك إشارة أكبر من أو تساوي ( $\geq$ ) ولهذا يتطلب معالجة خاصة، حتى يمكن تحويل اللامتساويات إلى متساويات. حيث نلاحظ أن الطرف الأيسر قد يساوي، وقد يكون أكبر من الطرف الأيمن لها، لذلك في حالة تحويل هذه اللامتساويات إلى متساويات - فإنه يجب طرح الفائض (Surplus) من الطرف الأيسر،

جدول (13 - 3) عناصر أو قيم الصف (Z) & (C-Z)

المتغير	الربح/الوحدة	الربح الصافي/الوحدة	الربح الصافي/الوحدة Z	عناصر أو قيم (C-Z)
X	10 -	$(2/3)(30) + 16/3(0) =$	20	$(10-20) = -10$
Y	30 -	$(1)(30) + 0(0) =$	30	$(30-30) = 0$
S1	0 -	$(1/6)(30) + -2/3(0)0 =$	5	$(0-5) = -5$
S2	0 -	$(0)(30) + 1(0)0 =$	0	$(0-0) = 0$

إذاً الجدول النهائي (14 - 3) الذي يمثل الحل الثاني هو كالآتي:

جدول (14 - 3) الحل الثاني (الأمثل)

قيم الحل	0	0	30	10	Basic	C
S1			Y	X	●	
S2						
RHS			1,6	2,3	Y	30
			1			0
			-2,3	16,3	S2	0
			5	20	Z	
			0	30		
			0	-10	C-Z	
			-5	0		

## 6 - جدول الحل الأمثل:

يتضح من الجدول السابق أننا توصلنا إلى الحل الأمثل، حيث كل المؤشرات في صف (C-Z) صفرية أو سالبة. ويوضح عمود المتغيرات الموجودة في الحل (●) تنكيكة الإنتاج المتألية ويوضح العمود RHS قيمتها، كما يوضح حصة الأرباح المباشرة المتألية (أسفل العمود) وهي كالآتي: ديناراً  $Z = 60$ ، وحدتان  $Y = 2$  والمتغير  $X$  هو المتغير الموجود في الحل. كما يتضح أن العلاقة المتاحة مستقلة بالكامل S1، والتي ترمز للعلاقة الماطلة في المرحلة الآلية. بينما الطاقة المتاحة لم تستغل استغلالاً كلياً حيث  $S2 = 8$  والتي ترمز للعلاقة الماطلة في المرحلة اليدوية. وهذه نفس النتيجة التي تم التوصل إليها باستخدام طريقة الرسم البياني.

ملخص خطوات الطريقة البسيطة لحل مشاكل القيمة العظمى:

- 1- ضع المشكلة في صورة نموذج للبرمجة الخطية.
- 2- حول اللامتساويات إلى متساويات وذلك بإضافة المتغيرات المشترائية.
- 3- جرد المتساويات من معاملاتها مكوناً جدول الطريقة البسيطة.
- 4- أوجد الحل البيئي للمشكلة.
- 5- إنحصر في ما إذا كان الحل الحالي هو الحل الأمثل (كل معاملات الصف (C-Z) أقل من أو تساوي الصفر) أم لا. فإذا كان نعم... تكون المشكلة قد حلت، وإذا كان لا... إبحث عن الحل الأفضل، وذلك كما يلي:



وبذلك يكون الحل الأساسي الأول مكوناً من  $D1 = 9, D2 = 8, D3 = 12$  يكون كالآتي :

جدول (15 - 3) الحل المبدئي للقيمة الصغرى

C	Basic	4	6	0	M	0	M	0	M	قيم الحل
	●	A	B	S1	D1	S2	D2	S3	D3	RHS
M	D1	3	1	-1	1	0	0	0	0	9
M	D2	1	2	0	0	-1	1	0	0	8
M	D3	1	6	0	0	0	0	-1	1	12
	Z	5M	9M	-M	M	-M	M	-M	M	29M
	C-Z	4-5M	6-9M	M	0	M	0	M	0	

من خلال جدول الحل المبدئي (15 - 3) نجد أن الحل الأساسي يتضمن المتغيرات

الرومية ( $D1, D2, D3$ ) كما أن تكلفة هذا الحل مرتفعة جداً (2900) دينار، وهذا يدفعنا إلى العمل على تخفيضها. ويتم ذلك عن طريق استبعاد المتغيرات الرومية ذات التكاليف المرتفعة من الحل المبدئي. وتقوم طريقة السيمبلكس بتحقيق ذلك تلقائياً إذا كان للمشكلة حل ممكن. ولضمان هذه التلقائية قمنا بالفرض تكلفة مرتفعة جداً للوحدة من المتغيرات الرومية. لاحظ أن المتغيرات الرومية ليس لها وجود حقيقي في المشكلة ولا يمكن للحل الأمثل أن يتضمن أية قيمة موجبة أو سالبة لأي منها. والهدف منها هو المساعدة في التخلص من مازق السلبية بضمان ضرورة استبعادها من الحل الأمثل إن وجد، أما إذا لم يمكن التخلص من أي منها فهذا يعني أنه لا يوجد للمشكلة حل ممكن. الآن يمكن حل هذه المشكلة باتباع إحدى الطرق التالية :

#### 1- حل مشكلة القيمة الصغرى بواسطة إجراءات القيمة المظلمى :

عن طريق ضرب دالة الهدف في (1 -) يتغير الهدف من القيمة الصغرى إلى قيمة عظمى. وتتيح نفس الإجراءات والقواعد التي استخدمناها في تطوير مشكلة القيمة العظمى السابقة (مثال 1). وذلك لأن  $Maximize (Z)$  هي  $Minimize (-Z)$ .

#### 2- استخدام إجراءات وقواعد القيمة الصغرى، هي كما يلي :

في مشكلة القيمة المظلمى - كان المورد الأمثل هو المورد الذي يقابل أكبر قيمة موجبة من معاملات دالة الهدف. وفي مشكلة القيمة الصغرى، نجد أن المورد الأمثل هو المورد المقابل لأكبر قيمة سالبة من معاملات دالة الهدف. ففي الاستخدام الثاني يتم الوصول إلى الحل الأمثل، عندما تكون كل قيم معاملات دالة الهدف أكبر من أو تساوي

وليس إضافة المتغير الإضافي كما سبق ذكره في المثال (1) للقيمة المظلمى، الذي يضاف عندما تكون اللامتناهيات تحمل إشارة أقل من أو تساوي ( $\leq$ ) لذلك في هذا المثال، نرسم لهذه الزيادة المطلوب طرحها في القيد الأول والثاني والثالث ( $S1, S2, S3$ ). ويكون الشكل الذي عليه اللامتناهية بعد طرح الفائض كالآتي :

القيود :

$$3A + B - S1 - 0S2 - 0S3 = 9$$

$$A + 2B - 0S1 - S2 - 0S3 = 8$$

$$A + - 0S1 - 0S2 - S3 = 12$$

فعلماً في المعادلة الأولى، هذه المتساوية تكون صحيحة إذا كانت ( $3A + B$ ) أكبر من  $S1$ ، أما إذا كانت  $S1$  أكبر من ( $3A + B$ ) أو كانتا متساويتين فإن هذه المتساوية لا تنطبق. فإذا افترضنا، كما كنا نعمل عند إيجاد الحل المبدئي، أن  $A, B$  تساويان الصفر، فإن :

$$3(0) + 0 - S1 - 0S2 - 0S3 = 9$$

$$0 + 0 - S1 - 0 - 0 = 9$$

$$-S1 = 9$$

ولكن هذا غير مقبول من الناحية الرياضية، ولذلك فإنه نضاف قيمة أخرى، نسمي المتغير الاصطناعي Artificial Variable، والذي يمكن التغلب على هذه المشكلة الرياضية، وهو عبارة عن مادة، أو ثروة. غير أن تكلفة الوحدة منه مرتفعة جداً ( $M$ ) ولكن مثلاً (دينار  $M = 100$ ). فإذا رمزنا لهذا المتغير الاصطناعي بالرمز  $D1$  في المتباينة الأولى، وهذا المتغير عنصر وهمي ليس له وجود فعلاً، ولا يجوز أن يتطوّر عليه الحل الأمثل للمشكلة، ولذلك فقد افترضنا أن تكلفته مرتفعة جداً لنضمن عدم دخوله بين تركيبة العناصر المثالية. فإن المتساوية السابقة تأخذ الشكل التالي :

$$3A + B - S1 + D1 - 0S2 - 0S3 = 9$$

وبذلك تكون دالة الهدف والقيود لهذه المشكلة بعد تعديلها كالآتي :

$$\text{Min. } Z = 4A + 6B - 0S1 - 0S2 - 0S3 + 100D1 + 100D2 + D3$$

القيود :

$$3A + B - S1 + D1 = 9$$

$$A + 2B - S2 + D2 = 8$$

$$A + 6B - S3 + D3 = 12$$

$$\text{شرط عدم السلبية : } A, B, S1, S2, S3, D1, D2, D3 \geq 0$$



الجدول الثالث (18 - 3)

C	Basic	4	6	0	100	0	100	0	100	0	100	قيم الحل
	•	A	B	S1	D1	S2	D2	S3	D3	D3	RHS	
4	A	1	0	-6/17	6/17	0	0	1/17	-1/17	-1/17	42/17	
6	B	0	1	1/17	-1/17	0	0	-3/17	3/17	3/17	27/17	
100	D2	0	0	4/17	-4/17	-1	1	5/17	-5/17	-5/17	40/17	
	Z	4	6	382/17	-382/17	-100	100	486/17	-486/17	-486/17	4330/17	
	C-Z	0	0	-382/17	2082/17	100	0	-486/17	2186/17	2186/17		

الجدول الرابع (19 - 3)

C	Basic	4	6	0	100	0	100	0	100	0	100	قيم الحل
	•	A	B	S1	D1	S2	D2	S3	D3	D3	RHS	
0	S3	0	0	4/5	-4/5	-17/5	17/5	1	-1	-1	8	
4	A	1	0	-2/5	2/5	1/5	-1/5	0	0	0	2	
6	B	0	1	1/5	-1/5	-3/5	3/5	0	0	0	3	
	Z	4	6	-2/5	2/5	-14/5	14/5	0	0	0	26	
	C-Z	0	0	2/5	498/5	14/5	486/5	0	100	100		

وهذا الجدول (19 - 3) هو جدول الحل الأمثل حيث إن الصف (C-Z) لا توجد فيه قيم سالبة، وتفسر هذا الحل هو أن ينتج المصنع وحدتين من النوع (A) وثلاث وحدات من النوع (B) ويتكبد المصنع أقل تكلفة ممكنة وهي 26 ديناراً.

### ■ تحليل الحساسية Sensitive Analysis:

يقصد بتحليل الحساسية تحديد المدة التي يمكن أن تقلب أو تتغير في حدودها معاملات وثوابت النموذج دون تأثيرها على قيم المتغيرات الأساسية في الحل الأمثل.

وسوف نستعرض في هذا الجزء تحليل الحساسية وذلك من خلال:

#### 1 - التغير في الطرف الأيمن للمعادلات Right-Hand Side Ranging

#### 2 - التغير في معاملات دالة الهدف Changes in the Objective Function Coefficients

وسوف نستعرض هذا التحليل من خلال المثال (3):

(مثال 3): نفرض أن مشروعاً مالياً متخصص في أعمال الطلاء الداخلي والخارجي

للبيوت وأنه يستخدم مادتين (A, B) لتصنيع الدهان الداخلي والخارجي وأن أعلى كمية

الصفر (0) ، وليس أقل من أو تساوي الصفر (0) ، كما كان في حالة التعظيم، ويتم تطوير الحل للمثال السابق كما يلي:

الجدول المبني لمشكلة التقليل يكون على الصورة التالية في الجدول (16 - 3) بعد افتراض أن  $M = 100$  (العمود الأيمن في هذه الحالة يمثل أكبر قيمة سالبة، والصف الأيمن يمثل أقل قيمة أو نسبة موجبة في العمود (RHS)، وهذا الأمر لا يختلف عن حسابه في مشكلة القيمة العظمى وكذلك كل باقي الإجراءات اللازمة للانتقال من حل أساسي إلى آخر تظل كما هي:

جدول الحل المبني (16 - 3)

C	Basic	4	6	0	100	0	100	0	100	0	100	قيم الحل
	•	A	B	S1	D1	S2	D2	S3	D3	D3	RHS	
100	D1	3	1	-1	1	0	0	0	0	0	9	
100	D2	1	-2	0	0	-1	1	0	0	0	8	
100	D3	1	6	0	0	0	0	-1	1	1	12	
	Z	500	9030	-100	100	-100	100	-100	100	100	2900	
	C-Z	-496	-892	100	0	100	0	100	0	100	0	



في هذا الجدول الصف الأمثل هو الصف الذي يمثل (D3) وأن معامل B مع D3 هو عنصر المركز أو البؤرة Pivot ويقسمه هذا الصف على (6) وهي قيمة البؤرة واستبدال D3 بالمغير B فنحصل على الصف B الجديد في الجدول (17 - 3 - 18).

الجدول الثاني (17 - 3)

C	Basic	4	6	0	100	0	100	0	100	0	100	قيم الحل
	•	A	B	S1	D1	S2	D2	S3	D3	D3	RHS	
6	B	1/6	1	0	0	0	0	-1/6	1/6	1/6	2	
100	D1	17/6	0	-1	1	0	0	1/6	-1/6	-1/6	7	
100	D2	2/3	0	0	0	-1	1	1/3	-1/3	-1/3	4	
	Z	346.0	6	-100	100	-100	100	49	-49	-49	1112	
	C-Z	-446.9	0	100	0	100	0	-49	149	149		

جدول (21 - 3) الحل الأمثل

C	Basic	3	2	0	0	0	0	قيم الحل
	●	Xc	Xi	S1	S2	S3	S4	RHS
2	Xi	0	1	2/3	-1/3	0	0	1 1/3
3	Xc	1	0	-1/3	2/3	0	0	3 1/3
0	S3	0	0	-1	1	1	0	3
0	S4	0	0	-2/3	1/3	0	1	2/3
	Z	3	2	-1/3	-4/3	0	0	12 2/3
	C-Z	0	0	1/3	4/3	0	0	

جدول (22 - 3) ملخص للتائج

القيمة المعطى	الفرار	متغيرات الفرار
3 1/3	إنتاج 3 1/3 طناً من الطلاء الخارجي	Xe
1 1/3	إنتاج 1 1/3 طناً من الطلاء الداخلي	Xi
12 2/3	الأرباح الناتجة مكون 12 2/3 ألفاً من الأطنان	Z

1- التغير في الطرف الأيمن للمعادلات Right-Hand-Side Ranging :

إذا أردنا أن نتعرف على أثر الزيادة أو النقص في الطاقة الإنتاجية للمواد الخام A, B بساعة واحدة على الريح (Z)، يمكن الإجابة على هذا السؤال من خلال جدول الحل (21) - (3)، وذلك بالنظر إلى معاميل دالة الهدف في C-Z الذي يقابل الرمز (S1) وهو  $1/3$  بمعنى أن كل زيادة أو نقص للطاقة المتاحة بمقدار طن من المواد الخام A سوف يزيد أو ينقص الأرباح بمقدار  $1/3$  دينار. وبنفس المنطق - فإن زيادة الطاقة المتاحة من المواد الخام B بطن واحد يزيد الأرباح بمقدار  $4/3$  ديناراً، وتخفيضها بطن واحد سيخفض الأرباح بنفس القيمة. ولكن ماذا عن الزيادة على الطلب في المعادلة الثالثة؟ بالنظر إلى معاملة دالة الهدف والتي تقابل (S3)، نلاحظ وجود قيمة صفر، مما يعني أن زيادة الطلب لن تؤثر بشيء على الأرباح، وهذه في الواقع حقيقة، وذلك لأنه - وبفحص الحل الأمثل - نلاحظ أنه يترتب عنه وجود (3) أطنان غير مستغلة

يمكن أن تتوزع من A هي 6 أطنان ومن B هي 8 أطنان، وأن المتطلبات الزمنية من الدمان الخارجي والداخلي معطاة في الجدول (20-3).

جدول (20 - 3)

أنواع المواد الخام		المواد الخام: الأثاث لكل طن من الحديد		المطابقة للمواصفة
	الطلب الخارجي Exterior	الطلب الداخلي Interior		
Raw Material A	1	2		6
Raw Material B	2	1		8

علماً بأن المطلوب من الطلاء الداخلي لا يزيد عن المطلوب من الطلاء الخارجي بعين واحد وأن أعلى مطلوب من الطلاء الداخلي لا يتعدى (2) طن، وأن سعر الطن الواحد من الطلاء الداخلي 3000 دينار. والخارجي 3000 دينار. والمطلوب إيجاد كمية كل من نوعي الطلاء.

الحل

نفرض أن كمية العلاج الخارجي  $X_e$  والداخلي  $X_i$ ، ومن خلال ما سبق يمكن بناء نموذج البرمجة الخطية لهذه المشكلة بحيث يظهر هذا النموذج كما يلي :

الهدف : Max.  $Z = 3X_c + 2X_i$  (القيمة الكبرى)

التقود :

A المواد الخام  $X_c + 2X_i \leq 6$

B المواد الخام  $2X_c + X_i \leq 8$

الطلب  $-X_c + X_i \leq 1$

الطلب  $X_i \leq 2$

شرط عدم السلبية :

$X_c, X_i \geq 0$

أما الشكل المعياري لهذا النموذج فيأخذ الشكل التالي:

الهدف : Max.  $Z = 2x + 3y + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0S_4$  (القيمة الكبرى)  
 القيود:

$$\begin{aligned} A \quad & \text{الموارد الخام} \quad Xe + 2Xi + S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0S_4 = 6 \\ B \quad & \text{الموارد الخام} \quad 2Xe + Xi + 0S_1 + S_2 + 0S_3 + 0S_4 = 8 \\ & \text{الطلب} \quad Xe + Xi + 0S_1 + 0S_2 + S_3 + 0S_4 = 1 \\ & \text{الطلب} \quad Xi + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + S_4 = 2 \end{aligned}$$

شروط عدم السلبية :

$$Xe, Xi, S_1, S_2, S_3, S_4 \geq 0$$

جدول (24 - 3) يبين مدى زيادة الطاقة المتاحة

(1)	(2)	(3)
الطرف الأيمن من الحل الأمثل RHS	عناصر العمود S2	قسمة 1 على RHS/S2
$1\frac{1}{3}$	-1/3	-4/3
$3\frac{1}{3}$	2/3	5
3	1	3
2/3	1/3	3

يتضح أن أقل قيمة موجبة هي (3)، وهي تعبر عن القدر من الأطنان الذي به يمكن الطاقة المتاحة للمواد الخام A. وتعتبر أقل قيمة سالبة (4/3) عن تخفيض قدر من الأطنان الذي به يمكن زيادة الطاقة المتاحة للمواد الخام B، ويكون مدى الزيادة:

ونظراً لأن الطاقة المتاحة الأصلية (التي ابتدئ بها) للمواد الخام B هي (8) أطنان، فإن مدى الزيادة هو (5 - 8) إلى (4/3 + 8) أي من (3) إلى (9.3) أطنان. أما في ما يتعلق بالطلب في المعادلة الثالثة والرابعة - فإنه، وكما سميت الإشارة، هناك (3)، (2/3) ملن غير مستغلة في هاتين المعادلتين، وهذا المقدار من الأطنان يمثل الطلب الذي به يمكن تخفيض الطاقة المتاحة للطلبات، قبل أن يحدث أي نقص في الوقت المطلوب للطلبات. ونظراً لأن لم يتم استخدام كل الأطنان لتغطية الطلب، فإنه يمكن زيادتها بشكل مطلق، دون التأثير على حل المشكلة. وعلى ذلك، فإن حدود الزيادة هي (3 - 1) إلى (مالا نهاية + 1) أي من (2 - إلى ما لا نهاية).

أما من حيث المصادر فيمكن تقسيمها إلى نوعين: - غير كافية (Not Sufficient) ووفرة (Abundant) وذلك اعتماداً على استهلاكها أو عدم استهلاكها كاملاً للوصول إلى الهدف. ويمكن الحصول على المعلومات اللازمة عن المصادر من خلال الرجوع إلى جدول الحل النهائي؛ فمثلاً المادة (A)، القيد الأول، هي من النوع غير الكافي نظراً لأن (0 + S1) وكذلك الحال بالنسبة للمصدر الثاني (B)، وهذا فإن زيادة هذه المصادر سوف تؤثر إيجابياً على قيمة دالة الهدف. أما القيود (المصادر) التي تحتوي على متغيرات أساسية موجبة القيمة فإنها تكون فائضة وأن زيادتها لا تؤثر على دالة الهدف بل تزيد من حالة الفضان التي تقع فيها. ومن خلال جدول الحل (20 - 3) يمكن إظهار حالة المصادر كما في الجدول (25 - 3).

في معادلة الطلب. وبالتالي - فإن الزيادة في الأطنان في هذه المعادلة مستضاف إلى الأطنان غير المستغلة منه، ولن تؤثر على الأرباح بشيء، وهذا الإجراء ينطبق على المعادلة الرابعة للطلب. وهذه القيم الأربع (0، 4/3، 1/3) تسمى أسعار الظل Shadow Prices.

من خلال ذلك، نستطيع أن نقول بأن الأرباح سوف تزداد أو تنخفض بتلك القيم لأسعار الظل، وذلك نتيجة لزيادة أو انخفاض الطاقة المتاحة من المواد الخام وكذلك الطلب - السؤال هنا: ما هو عدد الأطنان التي يمكن استخدامها والطلب عليها، مع المحافظة أو الإبقاء على تحقيق هذه الزيادة في الأرباح؟ وهو ما يعرف بالمدى الذي في إطاره تبقى ظلال الأسعار سارية المفعول The Shadow، Over Which The Range، Prices Remain Valid، وذلك لأنه لا يمكن زيادة هذه الطاقات المتاحة باستمرار، أو بدون وجود حدود معينة لهذه الزيادة. وتحديد هذا المدى، فإننا سنتبع خطوات مشابهة للخطوات التي كنا نتبعها في تحديد الصف المستبدل، وذلك كما يلي:

أولاً: بالنسبة لزيادة الطاقة المتاحة للمواد الخام A، يمكن تحديد مدى هذه الزيادة، وذلك بقسمة الطرف الأيمن للمعادلات على عناصر العمود (S1)، كما في الجدول (23 - 3).

جدول (23 - 3) مقدار الزيادة

(1)	(2)	(3)
الطرف الأيمن من الحل الأمثل RHS	عناصر العمود S1	قسمة (1) على RHS/S1
11/3	2/3	2
3 1/3	-1/3	-10
3	-1	-3
2/3	-2/3	-1

إن أقل قيمة موجبة (2) تمثل القدر المتاح من الأطنان الذي به يمكن تخفيض الطاقة المتاحة من المواد الخام A، وتمثل أقل قيمة سالبة (1) القدر المتاح من الأطنان الذي به يمكن زيادة الطلب في المعادلة الرابعة. ونظراً لأن الطاقة المتاحة الأصلية التي ابتدئت بها المواد الخام A، هي (6) أطنان، فإن حدود الزيادة في هذه الطاقة هي: (6 - 2) إلى (1 + أي من 4 إلى 7 أطنان من المواد الخام A.

وينفس المنطق، يمكن تحديد المدى الذي به يمكن زيادة الطاقة للمواد الخام B، مع المحافظة على بقاء ظل الكلفة (4/3) ساري المفعول.

### جدول (26 - 3) مراحل الحل

Right-Side Elements in Iteration			
(2) الأمثل (Optimum)	(1)	Starting 0 البدائية	المعادلات Equation
12 2/3 + 1/3 ▲ 1	12	0	Z
4/3 + 2/3 ▲ 1	2 + ▲ 1 =	6 + ▲ 1 =	1
10/3 - 1/3 ▲ 1	4	8	2
3 - 1 ▲ 1	5	1	3
2/3 - 2/3 ▲ 1	2	2	4

من خلال هذا الجدول نحصل على المعادلات التالية :

$$X_i = 4/3 + 2/3 \Delta 1 \geq 0$$

$$X_e = 10/3 - 1/3 \Delta 1 \geq 0$$

$$S_3 = 3 - \Delta 1 \geq 0$$

$$S_4 = 2/3 - 2/3 \Delta 1 \geq 0$$

وبعد حل هذه المعادلات نحصل على المدى المطلوب :

$$-2 \leq \Delta 1 \leq 1$$

وأي تغيير في المصدر الأول خارج هذا المدى سوف يقود إلى حل لا نهائي (غير محدود).

### 2 - التغيير في معاملات دالة الهدف Objective Function Coefficients

من المعروف أن متغيرات دالة الهدف تحتوي على التكاليف أو الأرباح. ويقوم نموذج البرمجة الخطية بتحديد تشكيلة المتغيرات الأساسية في الحل الأمثل من هذه المتغيرات في أحد جوانبه بالاسترشاد بمعاملات هذه المتغيرات في دالة الهدف. وقد يرض متخذ القرار في التعرف على النتائج التي قد تترتب على اختلاف أحد أو بعض هذه المعاملات على تشكيلة المتغيرات الأساسية الحالية، لأن هذه المعاملات عادة ما تكون تقديرية كما هو في السابق. ويوجب أسلوب تحليل الحساسية على هذا التساؤل عن طريق تحديد مدة التغير في معاملات دالة الهدف والتي لا تؤثر في هذه التشكيلة. تتغير قيمة دالة الهدف (الربح/التكاليف) تبعاً لتغير قيم المعاملات المرتبطة بالمتغيرات الداخلة

### جدول (25 - 3) حالة المصادر

Status of Resource	Slack	Resource
غير كافية Not Sufficient	S1 = 0	المواد الخام (A)
غير كافية Not Sufficient	S2 = 0	المواد الخام (B)
وفرة Abundant	S3 = 3	Limit on Excess of Interior over exterior paint
وفرة Abundant	S4 = 2/3	Limit on Demand for interior paint

تعرف وحدة تقييم (Unit Worth) المصدر بأنها مقدار الزيادة التي يمكن أن تطلأ على دالة الهدف نتيجة زيادة المصدر وحدة واحدة، ويمكن الحصول على وحدات تقييم المصادر من خلال جدول الحل وبالنسبة من معادلة Z في الجدول (قيم S1, S2, S3, S4) فمثلاً وحدة تقييم المصدر الأول تساوي 3 أو بمعنى آخر فإن زيادة المصدر الأول وحدة واحدة سوف يزيد. قيمة الفائدة بمقدار 3 وبهذا يمكن عرض معادلة Z اعتماداً على هذه الوحدات.

$$Z = 12 \frac{2}{3} - (1/3 S_1 + 4/3 S_2 + 0S_3 + 0S_4)$$

نلاحظ من هذه المعادلة أن زيادة S1 تقلل قيمة Z ولكن في نفس الوقت نحقق فائدة وذلك بالإفلال من المادة (A).

$$X_e + 2X_i + S_1 = 6$$

لاحظ أن المصادر S3, S4 لا تؤثر على الهدف لا بالزيادة ولا بالنقصان.

يرتبط كل مصدر من المصادر بعنصر أساسي فمثلاً المادة (A)، القيد الأول، يرتبط بالمتغير S1 لذا لا بد من تحديد مدى التغير (الزيادة أو النقصان) في هذا المتغير والتي تؤثر على قيمة دالة الهدف مع توفر الحل المطلوب؛ فمثلاً S1 تؤدي إلى الإفلال من المادة A وبالتالي زيادة الفائدة والإفلال من S1 يؤدي إلى زيادة المادة المستخدمة A. نفرض أن قيمة الزيادة على القيد الأول هي 1 ▲.

ومن خلال استعراض مراحل الحل مع الأخذ بعين الاعتبار قيم S1 يمكن الحصول على الجدول (26 - 3).

■ مشكلة الازدواج (أو النموذج المقابل) : The Dual Problem

1 - إذا كانت دالة الهدف في النموذج Maximization الأول تهدف إلى القيمة العظمى فإن دالة الهدف في النموذج المقابل سوف تهدف إلى القيمة الصغرى Minimization والمكس صحيح.

- وتستيع هذه الخطوات نلاحظ أنه إذا كان عدد المتغيرات في النموذج الأصلي يساوي (n) وعدد القيود المفروضة يساوي (m) فإن عدد المتغيرات في النموذج المقابل يصبح مساوياً إلى (m) وعدد القيود مساوياً إلى (n). وفي ما يلي بعض الأمثلة عن كيفية التحصيل من النموذج الأصلي إلى النموذج المقابل كما في الجدول (29 - 3).

جدول (3 - 27)

								قيم الحل
C	Basic	(3+ $\Delta$ )	2	0	0	0	0	
	●	Xe	Xi	S1	S2	S3	S4	RHS
2	Xi							
(3+ $\Delta$ )	Xe							
0	S3							
0	S4							
	Z							$12\frac{2}{3} + 10\frac{1}{3} \Delta$
	C-Z	0	0	$1/3 - 1/3 \Delta$	$4/3 + 2/3 \Delta$	0	0	

لاحظ أن هذه الدالة يمكن الوصول إليها من جدول الحل (28 - 3) وذلك اعتماداً على معادلة  $X_6$

جدول (28 - 3)

							قيم المحل
C	Basic	3	2	0	0	0	RHS
	●	Xe	Xi	S1	S2	S3	10/3
	Xe	1	0	-1/3	1/3	0	

ونظراً لأن  $S1, S2 \geq 0$  فإن

$$1/3 - \Delta/3 \geq 0$$

$$4/3 + 2\Delta/3 \geq 0$$

ومن هنا يمكن تحديد قيمة  $1 \leq \Delta \leq 2$ ، بمعنى آخر فإن  $X_e$  يمكن أن يقل إلى (1) أو أكبر إلى (4) دون أن يؤثر على المتغيرات، لكن قيمة دالة الهدف سوف تتغير حسب:

$$Z = 12 \frac{2}{3} + 10 \frac{1}{3} \Delta$$

النموذج الأصلي	النموذج المقابل	Dual Model
<p>Subject To</p> $\begin{aligned} X_1 + X_2 &\leq 3 \\ X_1 + 2X &\leq 4 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$ <p>Max. Z = <math>3X_1 + 2X_2</math></p>	<p>Subject To</p> $\begin{aligned} Y_1 + Y_2 &\geq 3 \\ Y_1 + 2Y_2 &\geq 2 \\ Y_1, Y_2 &\geq 0 \end{aligned}$ <p>Min. W = <math>50Y_1 + 36Y_2 + 81Y_3</math></p>	<p>Subject To</p> $\begin{aligned} 10Y_1 + 6Y_2 + 4.5Y_3 &\geq 9 \\ 5Y_1 + Y_2 + 18Y_3 &\geq 7 \\ Y_1, Y_2, Y_3 &\geq 0 \end{aligned}$ <p>S. T.</p>
<p>Max. Z = <math>9x_1 + 7x_2</math></p> <p>S. T.</p> $\begin{aligned} 10X_1 + 5X_2 &\leq 50 \\ 6X_1 + 6X_2 &\leq 36 \\ 4.5X_1 + 18X_2 &\leq 81 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$	<p>Max. Z = <math>9x_1 + 14x_2 + 6x_3</math></p> <p>S. T.</p> $\begin{aligned} X_1 + X_2 + X_3 &\leq 9 \\ 4X_1 - 3X_2 + 5X_3 &= 4 \\ X_1, X_2, X_3 &\geq 0 \end{aligned}$	<p>Min. W = <math>9Y_1 + 4Y_2</math></p> <p>S. T.</p> $\begin{aligned} Y_1 + 4Y_2 &\geq 9 \\ Y_1 - 3Y_2 &\geq 14 \\ Y_1 + 5Y_2 &\geq 6 \\ Y_1, Y_2 &\geq 0 \end{aligned}$

المشاكل العامة التي تواجه استخدام النمذجة المقابل :

1 - حالة عدم تناسب دالة الهدف مع علاقات القيود.

تحدث هذه المشكلة عندما تكون دالة الهدف هي البحث عن القيمة العظمى بينما تكون علاقات التباين الموجبة (أي أكبر من أو تساوي) في القيود، كما هو موضح في المثال التالي (مثال 4) :

<p>دالة الهدف : Max. Z = <math>12X_1 - 5X_2 + 8X_3</math> (القيمة العظمى)</p> <p>القيود :</p> $\begin{aligned} X_1 + X_2 - 2X_3 &\geq 32 \\ -X_1 + 3X_2 + X_3 &\geq 24 \\ 2X_1 + 2X_2 - 5X_3 &\geq 12 \end{aligned}$ <p>شرط عدم السلبية : <math>X_1, X_2, X_3 \geq 0</math></p>	<p>دالة الهدف : Max. Z = <math>18X_1 + 15X_2</math> (القيمة العظمى)</p> <p>القيود :</p> $\begin{aligned} 2X_1 + 4X_2 &\leq 120 \\ 4X_1 - 2X_2 &\geq 18 \\ X_1 + X_2 &\leq 37 \end{aligned}$ <p>شرط عدم السلبية : <math>X_1, X_2 \geq 0</math></p>
---	---

في (1) لتحويل إلى دالة القيمة الصغرى وتنسق مع علاقات القيود. وتصبح دالة الهدف كالآتي :

دالة الهدف Min. Z =  $-12X_1 + 5X_2 - 8X_3$  (القيمة الصغرى)

2- عندما نمتزج علاقات القيود في المشكلة الواحدة.

وجود علاقات تباين موجبة ( $\geq$ ) وسالبة ( $\leq$ ) في نفس قيود المشكلة. والمثال التالي يوضح ذلك :

<p>دالة الهدف : Max. Z = <math>18X_1 + 15X_2</math> (القيمة العظمى)</p> <p>القيود :</p> $\begin{aligned} 2X_1 + 4X_2 &\leq 120 \\ 4X_1 - 2X_2 &\geq 18 \\ X_1 + X_2 &\leq 37 \end{aligned}$ <p>شرط عدم السلبية : <math>X_1, X_2 \geq 0</math></p>	<p>دالة الهدف : Max. Z = <math>18X_1 + 15X_2</math> (القيمة العظمى)</p> <p>القيود :</p> $\begin{aligned} 2X_1 + 4X_2 &\leq 120 \\ 4X_1 - 2X_2 &\geq 18 \\ X_1 + X_2 &\leq 37 \end{aligned}$ <p>شرط عدم السلبية : <math>X_1, X_2 \geq 0</math></p>
---	---

من الواضح أن إشارة تباين القيد الثاني موجبة (أكبر أو تساوي)، وهذه الإشارة لا تتفق مع باقي القيود ومع دالة الهدف. ويمكن التخلص من هذه المشكلة في النموذج الأصلي عن طريق ضرب هذا القيد (الثاني) في (-1) ليصبح القيد كالآتي :

$$-4X_1 + 2X_2 \leq -18$$

ولكن سوف يترتب على ذلك أن المتغير المعامل الخاص بهذا القيد، والذي يظهر في الحل الأساسي الأول يتخذ قيمة سالبة (أقل أو يساوي)، خارجاً بذلك على شرط عدم السلبية. ولكن يمكن التخلص من هذه المشكلة بعدة طرق منها :

أ- التخلص من القيم السالبة عن طريق عمليات الصغرى في طريقة الاستبعاد الكامل قبل إصدار جدول الحل الأساسي الأول. فلو فرضنا في القيد  $(-18) - 4X_1 + 2X_2$  التخلص من  $X_1$  وذلك عن طريق استخدام القيد  $(37) X_1 + X_2 \leq 37$ . ونتم ذلك بضرب المعادلة الثانية في (4) وإضافته جبرياً إلى المعادلة الأولى كالآتي :

$$(4) \quad 4X_1 + 4X_2 \leq 148$$

$$-4X_1 + 2X_2 \leq -18$$

$$0 + 6X_2 \leq 130$$

ب - صياغة النموذج المقابل (الثاني) أو الأزواج) إذا كانت دالة الهدف في النموذج الأصلي لا تحتوي على معاملات سالبة. ويمكن توضيح التفسير للنموذج الأصلي إلى النموذج المقابل كالآتي :



ثم يتم تحويل إشارة التباين في المعادلة (138)  $2X1 + 3X2 \geq 138$  في (1) كما سبق أن ذكرنا. ويصبح الثاني في هذه الحالة كالآتي:

دالة الهدف: $\text{Min. } W = 138Y1 - 138Y2 + 16Y3 + 28Y4$ (القيمة الصغرى)
التقود:
$2Y1 - 2Y2 + S1 \geq 12$
$3Y1 - Y2 + S2 \geq 9$
شروط عدم السلبية: $Y1, Y2, S1, S2 \geq 0$

وبذلك نتخلص من مشكلة وجود متغير غير محدد الإشارة في النموذج.

#### ■ المعاني الاقتصادية لمشكلة الازدواج:

1- من بين المزاي التي يمكن أن تنتج عندما نستخدم النموذج المقابل (الازدواج) هو تبسيط المتباينات الخطية التي يراد حلها؛ فلو فرضنا في مشكلة معينة وجود عشرين قيداً مثلاً وثلاثة متغيرات، فإنه بعد تحويل المشكلة الأصلية إلى مشكلة ازدواج، فيصبح لدينا ثلاثة شروط فقط، أما في حالة وجود متجهين فقط، فيصبح عدد الشروط اثنين أيضاً.

2- لو فرضنا أن الحل الأمثل في النموذج الأصلي يحتوي على  $(K, L, M)$  وأن الحل الأمثل للنموذج المقابل يحتوي على  $(A, B, C)$ ، فإن المسؤول عن هذا المشروع سوف لن يقبل تأجير هذا المصنع، إلا إذا تحصل على الأقل مما سوف يتحصل عليه إذا قام هو بالإنتاج، ويمكن التعبير عن ذلك في صورة معادلات رياضية كما يلي:

$$2M + 4L + 3K \leq 60C + 40B + 80A$$

3- من خلال الأدلة السابقة وجدنا أن قيمة  $(Z)$  سواء كانت في حل مشكلة النموذج الأصلي للبرمجة الخطية أو الحل لمشكلة النموذج المقابل متساوية. فما معنى ذلك؟ إن ذلك يعني أن قيمة هذه الطاقات الإنتاجية للمشروع تساوي بالتبسيط الريح الذي يمكن لهذا المشروع تحقيقه، وذلك إذا وضعت هذه الموارد في أحسن فرصة ممكنة.

4- في حالة وجود قيمة صفر لأحد المتغيرات في النموذج المقابل، وأنه لم يتم استخدام كل الوقت المتاح في هذا القسم، فهذه نتيجة منطقية، حيث يعني وجود وقت فائض وغير مستغل في هذا القسم. إن إضافة أي وقت آخر لهذا القسم لن يؤثر في دالة الهدف.

دالة الهدف:  $\text{MIN. } W = 120Y1 - 18Y2 + 37Y3$  (القيمة الصغرى)

التقود:

$$2Y1 - 4Y2 + Y3 \geq 18$$

$$4Y1 - 2Y2 + Y3 \geq 15$$

شروط عدم السلبية:  $Y1, Y2, Y3 \geq 0$

كما يمكن في الواقع الإبقاء على المعادلة  $4X - 2X2 \geq 18$  دون تعديل اتجاه إشارة التباين، على أن يبدأ الحل الأساسي الأول بمتغير وهي في هذا القيد، عليك بصياغة المشكلة بهذه الطريقة وحلها وتوضيح المتغيرات في جدول الحل الأمثل.

3- عندما تكون علاقة أحد التقود أو بعضها علاقة تساوي. ويرتب على ذلك بالطبع أن المتغير المقابل لهذا القيد (أو المتغيرات المقابلة لهذه التقود) في الازدواج يكون غير محدد الإشارة. ونفرض مثلاً:

دالة الهدف: $\text{Max. } Z = 12X1 + 9X2$ (القيمة العظمى)
التقود:
$2X1 + 3X2 = 138$
$2X1 \leq 16$
$X2 \leq 28$
شروط عدم السلبية: $X1, X2 \geq 0$

ويكون الازدواج أو الثاني لهذه المشكلة كالآتي:

دالة الهدف: $\text{Min. } W = 138Y1 + 16Y2 + 28Y3$ (القيمة الصغرى)
التقود:
$2Y1 + Y2 \geq 12$
$3Y1 + Y3 \geq 9$
غير محددة الإشارة: $Y1$
شروط عدم السلبية: $Y1, Y2 \geq 0$

وبلاحظ أن  $Y1$  في الثاني، والذي يعادل القيد  $2X1 + 3X2 = 138$  في النموذج الأصلي غير محدد الإشارة لقيام علاقة التساوي في هذا القيد. ويتم التخلص من هذه المشكلة بتحويل علاقة التساوي إلى علاقتي تباين متضادين في الاتجاه. فالتقيد  $(2X1 + 3X2 = 138)$  يعادل تماماً القيدين:

$$2X1 + 3X2 \leq 138$$

$$2X1 + 3X2 \geq 138$$

### جدول (31 - 3) الحل الثاني

قيم الحل	0	0	9	3	Basic	C
RHS	S2	S1	X2	X1		
2	1/2	0	1	1/2	X1	9
0	-2	1	0	-1	S1	0
18	9/2	0	9	9/2	Z	
0	0	0	9	9/2	C-Z	

### جدول (32 - 3) الحل الأمثل

قيم الحل	0	0	9	3	Basic	C
RHS	S2	S1	X2	X1		
2	1/2	0	1	1/2	X2	9
0	-2	1	0	-1	X1	3
18	9/2	0	9	9/2	Z	
-9/2	0	0	0	-3/2	C-Z	

لاحظ من خلال الجدول أن القيمة ( $Z = 18$ ) في المرحلة لم تتحسن من جراء إجراء العمليات الحسابية اللازمة للوصول إلى المرحلة (2). لاحظ أيضاً أن قيمة  $S2$  (المتغير الذي سوف يخرج) هي الصفر بمعنى آخر فإن قيمة المتغير الداخل سوف تصبح هي الأخرى مساوية للصفر وأنه لن يطرأ أي تحسين على دالة الهدف.

ومن خلال النظر إلى الرسم (4 - 3) الممثل للحل نلاحظ أن هناك 3 خطوط (قيود) تقود إلى نقطة الحل الأمثل، وأن النموذج المستخدم يحتوي على متغيرين وهذا بدوره يعني أن هناك قيماً من القيود إضافياً (لا حاجة له) لأنه يلزم فقط قيودان لإيجاد الحل الأمثل. وتسمى المرحلة الثانية هنا بالدورة (Cycle) ويمكن إيجاد الطرق اللازمة لاكتشاف هذه الحالة لتفادي عدم تكرارها وازدانة الوقت في إجراء العمليات الحسابية لهذه الدورة.

### Special Cases in the Method of البرمجة الخطية

#### Linear Programming

توجد بعض الحالات الخاصة التي قد تظهر عند استخدام الطريقة العامة (السيمبلكس) لإيجاد أفضل الحلول، ومن أهم هذه الحالات ما يلي:

#### 1 - التفش أو الانحلالية Degeneracy

يقصد بالتفش الحالة التي يتم عندها الوصول إلى الحل في مرحلة ما بحيث يتكرر هذا الحل في المرحلة التالية. وسوف نستعرض هذه الحالة من خلال المثال (5).

دالة الهدف:  $\text{Max. } Z = 3X1 + 9X2$  (القيمة العظمى)

القيود:

$$X1 + 4X2 \leq 8$$

$$X1 + 2X2 \leq 4$$

$$X1, X2 \geq 0$$

لاستخدام الطريقة العامة نحول هذه المعادلات إلى الشكل المعياري الذي يتناسب مع استخدام الطريقة العامة (السيمبلكس):

دالة الهدف:  $\text{Max. } Z = 3X1 + 9X2 + 0S1 + 0S2$  (القيمة العظمى)

المتغير:

$$X1 + 4X2 + S1 = 8$$

$$X1 + 2X2 + 0S2 = 4$$

$$X1, X2, S1, S2 \geq 0$$

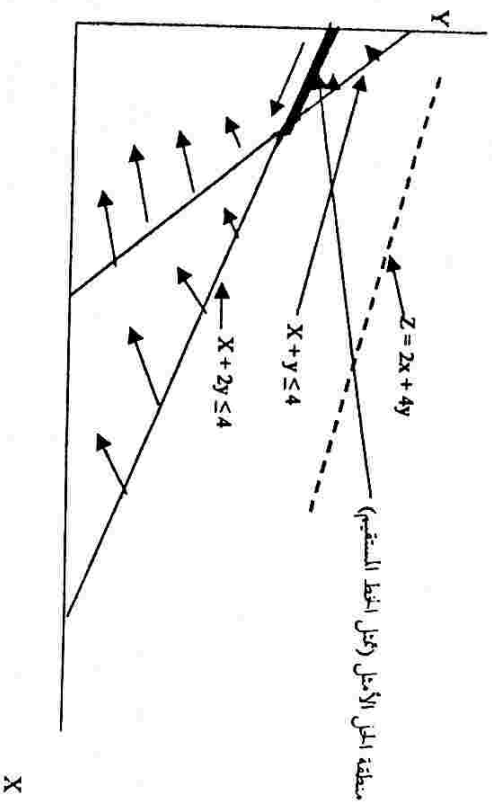
شروط عدم السلبية:

المتغيرات الأساسية (Basic) هي  $S1, S2$  (المتغيرات الخارجة)

### جدول (30 - 3) الحل المبدئي

قيم الحل	0	0	9	3	Basic	C
RHS	S2	S1	X2	X1		
8	0	1	4	1	S1	0
4	0	1	2	1	S2	0
2	4/4 = 2	1	0	0	Z	
0	0	0	0	0	C-Z	

الرسم البياني (3-5)



لاحظ أن كل النقاط الواقعة على المستقيم BC تحقق الهدف. أما جدول الحل باستخدام الطريقة العامة فهو كما يلي:

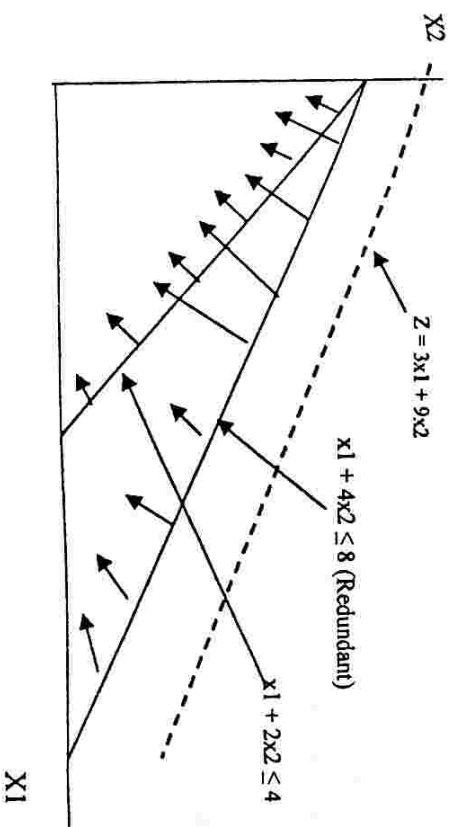
جدول (3-33) الحل المبني

C	Basic	2	4	0	0	قيم الحل
	X		Y	S1	S2	RHC
0	S1	1	2	1	0	5
0	S2	1	1	0	1	4
	Z	0	0	0	0	0
	C-Z	2	4	0	0	

جدول (3-34) الحل الثاني

C	Basic	2	4	0	0	قيم الحل
	X		Y	S1	S2	RHS
4	Y	1/2	1	1/2	0	5/2
0	S2	1/2	0	-1/2	1	3/2
	Z	2	4	2	0	10
	C-Z	0	0	-2	0	

الرسم البياني (3-4)



2- الحلول البديلة Optima Alternative :

عندما توازي دالة الهدف معادلة أحد القيود المتوفرة في النموذج الخطي فإنه سوف تظهر عدة نقاط على خط هذا القيد بحيث تحقق الحل المطلوب، وبهذا نحصل على أكثر من حل لنفس المشكلة، ويمكن استعراض هذه الحالة من خلال المثال (6) :

دالة الهدف :  $\text{Max. } Z = 2X + 4Y$  (القيمة المظني)  
 القيود :  
 $X + 2Y \leq 5$   
 $X + Y \leq 4$   
 شروط عدم السلبية :  $X, Y \geq 0$

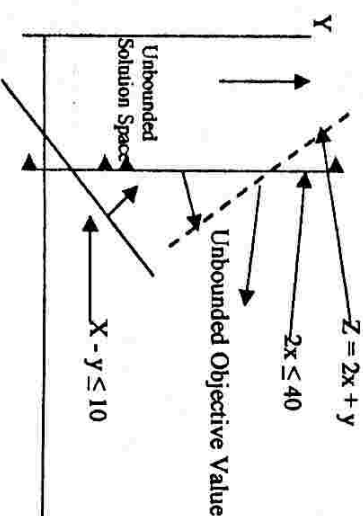
وباستخدام الرسم يمكن إيجاد الحل كما هو موضح في الشكل (3-5)

جدول الحل المبدي (3-36)

	C	Basic	2	1	0	0	قيم الحل
			X	Y	S1	S2	RHS
			●				10
	0	S1	1	-1	1	0	40
	0	S2	2	0	0	1	0
	0	Z	0	0	0	0	0
		C-Z	2	1	0	0	

نلاحظ أن  $X, Y$  هي المتغيرات التي ستدخل وتحل محل  $S1, S2$  حيث يبدأ بإدخال  $X$  نظراً لاحتوائها على أعلى قيمة، وبعد هذا تكون القيم في عمود  $Y$  إما سالبة أو صفراً، وهذا يعني أن زيادة هذا المتغير سوف لا تؤثر على القيود في أعمدة المتغيرات الداخلة (غير الأساسية Nonbasic) فإن منطقة الحل تكون غير محدودة وباتجاه المتغير الذي يحوي في عموده قيمة سالبة أو صفراً، ويمكن بيان هذا من خلال الشكل (3-6)

الرسم البياني (3-6)



وفي بعض الأحيان قد تكون منطقة الحل غير محدودة في حين تمتلك دالة الهدف حلاً واحداً. ويمكن إظهار هذه الحالة من خلال المثال التالي:

دالة الهدف:  $\text{Max. } Z = 6X + 2Y$  (القيمة العظمى)

القيود:

$$2X - Y \leq 2$$

$$X \leq 4$$

$$\text{شرط عدم السلبية: } X, Y \geq 0$$

جدول (3-35) الحل الأمثل

	C	Basic	2	4	0	0	قيم الحل
			X	Y	S1	S2	RHS
			●				3
	2	X	1	0	-1	2	10
	4	Y	0	1	1	-1	1
		Z	2	4	2	0	0
		C-Z	0	0	-2	0	

من خلال هذا الجدول (3-35) يتبين لنا أن الطريقة العامة تستطيع إظهار الحل في النقطتين B, C، والحلول البديلة أهمية كبيرة في الحياة العملية، حيث تتيح فرصة الاختيار واتخاذ القرار من قبل الإدارة وذلك بتوفر بدائل تتساوى فيها الفائدة المحققة. فمثلاً لو كانت المتغيرات  $X, Y$  تمثل مواد مستخدمة لتصنيع مادة ما فإنه من الأفضل اختيار الحل في المرحلة الأولى ( $Y = 5/2, X = 0$ ) نظراً لأنه من الأفضل إنتاج مادة لتحقيق هدف معين بدل إنتاج مادتين لإعطاء نفس الهدف.

### 3- الحلول غير المحدودة Unbounded Solution :

وتعني هذه الحالة عدم وجود حدود على الحل حيث يمكن زيادة متغير أو أكثر من المتغيرات الداخلة في قيود المشكلة دون مخالفة لأي قيد من القيود وقد تظهر حالة اللاحدود على:

أ - دالة الهدف.

ب - منطقة الحل.

وسوف نستعرض هذه الحالة من خلال المثال التالي (مثال 7):

دال الهدف:  $\text{Max. } Z = 2X + 1Y$  (القيمة العظمى)

القيود:

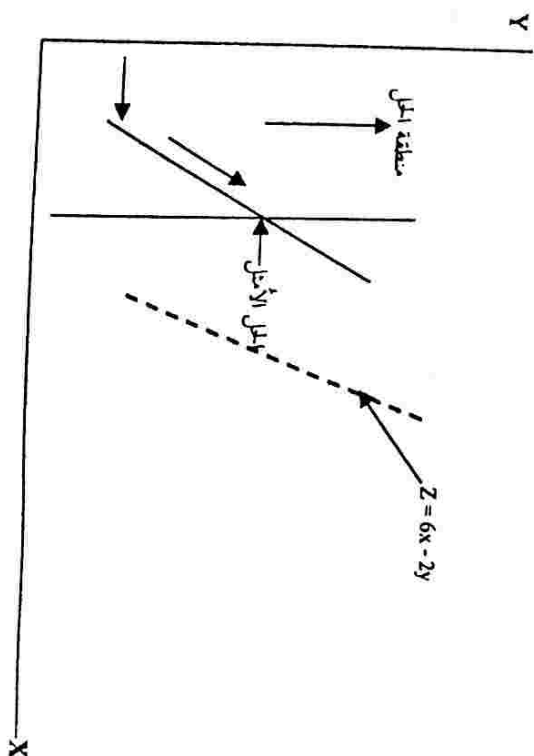
$$X - Y \leq 10$$

$$2X \leq 40$$

$$\text{شرط عدم السلبية: } X, Y \geq 0$$

من خلال جدول الحل المبدي التالي:

### الرسم البياني (7 - 3)



### 4 - عدم توفر الحل Nonexistent (Infeasible) Solution

تظهر هذه الحالة عند استخدام المتغيرات الاصطناعية وبالذات عندما يحتوي أحد القيود على الإشارة  $(\geq)$ ، وهي الحالة التي يتم فيها الوصول إلى الحل الأمثل للمشكلة المدروسة، ولكن مع احتواء هذا الحل على متغير اصطناعي أو أكثر. وسوف نستعرض المثال (8):

دالة الهدف	$\text{Max. } Z = 3X + 2Y$	(القيمة المثلى):
	$2X + Y \leq 2$	
	$3X + 4Y \geq 12$	
شرط عدم السلبية	$X, Y \geq 0$	

أما جدول الحل فإنه يبين أن المشكلة لا تمتلك حلاً وذلك من خلال قيمة R المبرجة (4 = R). أما في حالة التقليل فإنه لا يكون هناك حل إذا كانت قيمة المتغير الاصطناعي سالبة:

من خلال جدول الحل نلاحظ أن منطقة الحل غير محدودة وباتجاه Y (المرحلة الابتدائية) في حين أنه في المرحلة النهائية تمتلك دالة الهدف حلاً وحيداً  $(Y = 4, X = 6)$  كما هو موضح في الشكل.

### جدول (37 - 3) الحل المبدي

	C	Basic	6	2	0	0	0	قيم الحل
		•	X	Y	S1	S2	RHS	
	0	S1	2	-1	1	0	2	↓
	0	S2	1	0	0	1	4	
		Z	0	0	0	0	0	
		C-Z	6	2	0	0	0	

### جدول (38 - 3) الحل الثاني

	C	Basic	6	2	0	0	0	قيم الحل
		•	X	Y	S1	S2	RHS	
	6	X	1	-1/2	1/2	0	1	↓
	0	S2	0	1/2	-1/2	1	3	
		Z	6	-3	3	0	6	
		C-Z	0	5	-3	0		

### جدول (39 - 3) الحل الثالث

	C	Basic	6	2	0	0	0	قيم الحل
		•	X	Y	S1	S2	RHS	
	2	Y	0	1	-1	2	6	
	6	X	1	0	0	1	4	
		Z	6	2	-2	10	36	
		C-Z	0	0	2	-10		

## أسئلة وتارين للمناقشة Questions and Exercises for Discussion

### أسئلة

س 1- عرف كل ما أمكن ذلك واستخدام الأسلوب العلمي كلاً من:

أ - البرمجة الخطية ب - القيمة العظمى والصغرى ج - منطقة الحلول العملية والحل الأمثل.

س 2- ما هي استخدامات البرمجة الخطية؟ وما هي الشروط الأساسية التي يجب توافرها عند استخدام أو تطبيق أسلوب البرمجة الخطية؟ مع إعطاء أمثلة كل ما أمكن ذلك.

س 3- ما هو المقصود بطريقة التحليل البياني وطريقة السبيلكس؟ وما هي مزاياهما وعيوبهما؟

س 4- حدد واشرح ملخص خطوات الطريقة العامة لحل مشاكل القيمة العظمى.

س 5- ما هو المقصود بكل من:

أ - تحليل الحساسية؟ ب - النموذج الثنائي أو المقابل والمعاني الاقتصادية له؟

س 6- ما هي الحالات الخاصة التي قد تظهر عند استخدام إحدى طرق البرمجة الخطية وذلك لإيجاد أفضل الحلول؟

### تمارين Exercises

س 1- شعر السيد «أيمن» بأرهاق شديد، فتوجه إلى طبيبه الخاص الذي نصحه أن يتعاطى يومياً ما لا يقل عن 48 وحدة من فيتامين ب 1، و 50 وحدة من فيتامين ب 2. وتوجه السيد «أيمن» إلى صيدليته المفضلة حيث أبلغه الصيدلي أن لديه نوعاً من الجيوب يحتوي كل منها على وحدة من فيتامين ب 1 وخمس وحدات من ب 2 ونوع من الكبسولات يحتوي كل منها على أربع وحدات من فيتامين ب 1 ووحدة واحدة من ب 2. وبلغ سعر الوحدة الواحدة درهماً واحداً بينما يبلغ سعر الكبسولة الواحدة ثلاثة دراهم. يمتلك السيد «أيمن»، ما هي التكلفة المثالية من الجيوب والكبسولات التي يجب عليك تعاطيها يومياً لتنفيذ تعليمات الطبيب والتي تكلفك أقل ما يمكن؟

س 2- تقوم شركة السيارات المصرية بإنتاج نوعين من السيارات، النموذج الأول فاخر للماتلات والنموذج الثاني جيب للأعمال النشطة. وتحقق الشركة أرباحاً مباشرة على النوع الأول قدرها 600 دينار، وقدرها 300 دينار على الجيب. ويتطلب إنتاج السيارة الواحدة من النوع الأول 30 ساعة في خط النسيج و 10 ساعات في خط التشطيب والدركو، وساعتين في مركز الفحص والاختبار، بينما تحتاج الجيب إلى 12 ساعة على

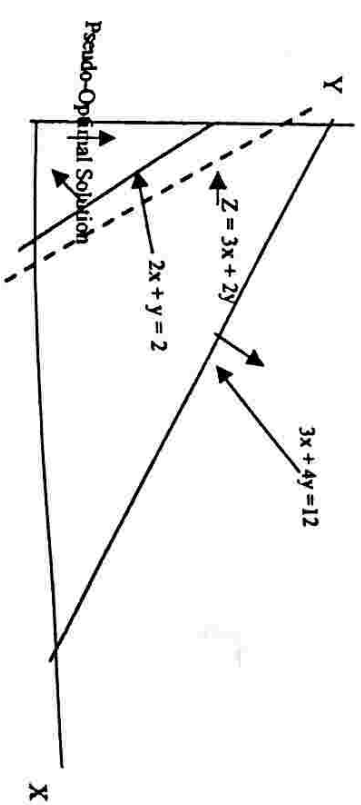
### جدول (3 - 40)

C	Basic	3	2	0	0	M	قيم الحل
	●	X	Y	SI	S2	R	RHS
0	SI	2	1	0	1	0	2
M	R	3	4	-1	0	1	12
	Z	3M	4M	-M	0	M	12M
	C-Z	3-3M	2-4M	M	0	0	

### جدول (3 - 41)

C	Basic	3	2	0	0	M	قيم الحل
	●	X	Y	SI	S2	R	RHS
2	Y	2	1	0	1	0	2
M	R	-5	0	-1	-4	1	4
	Z	4-5M	2	-M	2-4M	M	4 + 4M
	C-Z	7 + 5M	0	M	-2-4M	0	

### الرسم البياني (3 - 8)





س 5- مصنع صغير يقتصر إنتاجه على سلعتين وذلك من خلال ثلاثة أقسام إنتاجية. الجدول التالي يبين المعلومات المتوفرة لدى المصنع :

السلعة	المصنع	التركيب	التجميع	ربح الوحدة بالدينار
السلعة الأولى (الدراجات العادية)	1 ساعة	5 ساعات	3 ساعات	80
السلعة الثانية (الدراجات النارية)	2 ساعتان	4 ساعات	1 ساعة	100
الطاقة المتاحة	720	1800	900	

المطلوب :

1 - تحديد المزيج السليمي من السلعتين والذي يحقق أقصى ربح ممكن في ظل القيود المفروضة عن طريق استخدام أسلوب التحليل البياني . وهل يوجد ساعات غير مستغلة؟

2 - ما هو القرار الأمثل الذي يجب اتخاذه إذا تغيرت أرباح السلعتين كأن يحقق المصنع ربحاً قدره (100) دينار للسلعة الأولى و(80) ديناراً للسلعة الواحدة الثانية؟

3 - أوجد الجدول المبني ثم الجدول الأول باستخدام طريقة السيمبلكس .

س 6- تقوم شركة الخطوط الجوية الليبية بوضع دراسة إمكانية شراء طائرات جديدة لتوسيع نطاق خدماتها . وقد خصص لذلك مبلغ وقدره 480 مليون دولار . وبعد دراسة المروض المقدمة من قبل مصانع الطائرات وجد أن هناك ثلاثة أنواع من الطائرات يمكن الاختيار من بينها وهي (أ ، ب ، ج) وقد كان ثمن الطائرة (أ) ثمانية ملايين دولار . وثمن الطائرة (ب) ستة ملايين دولار وثمن الطائرة (ج) اثني عشر مليون دولار . ويقدر العائد الصافي اليومي من كل طائرة من النوع (أ) بعشرة آلاف دينار ومن النوع (ب) بستة آلاف دينار . ومن النوع (ج) باثني عشر ألف دينار . أما عدد الملاحين المتاحين بالشركة فهو (600) ملاح حيث تحتاج كل طائرة من النوع الأول لخمسة ملاحين وستة ملاحين للنوعين الثاني والثالث . وهناك عدد (240) عامل صيانة حيث تحتاج كل طائرة من النوع الأول لستة عمال لصيانتها . وثلاثة عمال لكل طائرة من النوعين الثاني والثالث .

المطلوب : وضع هذه المشكلة في صورة مشكلة برمجة خطية - ثم أوجد الحل الأمثل باستخدام طريقة السيمبلكس بالشكل الذي يجعل العائد أكبر ما يمكن ولماذا؟

س 7- يقوم مصنع الأمان للطائرات بإنتاج نوعين من البطاريات 6 فولت و12 فولت ويحتاج إنتاج البطارية من نوع 6 فولت إلى 6 ساعات عمل في قسم التجميع ، ساعتين عمل في قسم الاختيار والتغليف ، ويحتاج إنتاج البطارية من نوع 12 فولت إلى 3 ساعات عمل في قسم التجميع ، 4 ساعات عمل في قسم الاختيار والتغليف . فإذا كان عدد

خط التجميع 8 ساعات في خط التشغيل والدوركو وأربع ساعات في مركز الفحص والاختيار . وتبلغ طاقة خط التجميع 6000 ساعة في الفترة الإنتاجية ، بينما تبلغ طاقة خط التشغيل والدوركو 2600 ساعة في نفس الفترة ، وتبلغ طاقة مركز الفحص والاختيار 1000 ساعة في الفترة . فما هي تشكيلة الإنتاج المعالية التي تحقق أكبر حصة من الأرباح المباشرة؟

س 3- تقوم ورشة (وائل) لبناء زوارق الصيد ببناء نوعين نمطين من زوارق الصيد الحجم المتوسط والحجم الصغير . وهي تقوم بيع إنتاجها خلال فصل الربيع والخريف في فصل الخريف والشتاء محققة أرباحاً مباشرة على النوع المتوسط تبلغ 10 دنانير وعلى الصغير تبلغ 9 دنانير ، بينما تباع إنتاجها خلال فصل الخريف والشتاء في فصل الربيع والصيف مقابل أرباح مباشرة قدرها 20 ديناراً للزورق المتوسط و12 ديناراً للزورق الصغير . ويستغرق إنتاج الزورق المتوسط 10 ساعات في ورشة التجارة وست ساعات في التشغيل ، بينما يستغرق الزورق الصغير 12 ساعة في ورشة التجارة وساعتين في التشغيل . وتبلغ طاقة ورشة التجارة للفترة 6000 ساعة عمل ، بينما تبلغ طاقة ورشة التشغيل 7500 ساعة في السنة شهر . وتستورد الأخشاب اللازمة لبناء الزوارق من الخارج بمواصفات معينة . ويحدد حجم الإيرادات الحد الأقصى لعدد الزوارق التي يمكن بناؤها بما لا يزيد عن 1500 وحدة من كل نوع .

المطلوب : تحديد برنامج إنتاج وتصريف الزوارق الأمثل الذي يحقق أقصى حصة من الأرباح المباشرة .

س 4- معمل أو مصنع يمزج ثلاث رتب من البن الخام للحصول على ثلاثة أنواع من البن المطحون هي النوع الممتاز ، والنوع الناعم ، والنوع المعادي . ويختلف المزيج المطلوب لكل نوع من أنواع البن الثلاثة من الرتب الثلاث فالبن المعادي يتطلب أن يحتوي المزيج على 35% من الرتبة الأولى ، 20% من الرتبة الثانية ، 45% من الرتبة الثالثة . بينما البن الناعم يتطلب أن يحتوي المزيج على 30% من الرتب الأولى ، 30% من الرتبة الثانية ، 40% من الرتبة الثالثة ، أما البن الممتاز فيستطوي المزيج على 25% من الرتب الأولى ، 40% من الرتبة الثانية ، 35% من الرتبة الثالثة . وتبلغ تكلفة كيلو البن الخام من الرتبة الأولى 90 درهماً بينما تبلغ تكلفة الكيلو من الرتبة الثانية 80 درهماً وتبلغ تكلفة الكيلو غرام من الرتبة الثالثة 60 درهماً . وترغب الإدارة في الإنتاج بطاقتها الأسبوعية والتي تبلغ 6.5 أطنان من البن المطحون . لأنها مرتبطة بقرود توريد كميات من أنواع البن الثلاثة تبلغ 2.5 طن من البن المعادي ، 2 طناً من البن الناعم ، 1.5 طن من البن الممتاز .

المطلوب : ما هي خطة المزيج الذي ينبغي بهذه المتطلبات بأقل تكاليف ممكنة . ثم يفسر القيم الظاهرة في جدول الحل الأمثل ، وخاصة علاقة صف المؤشرات بمعاملات الإحلال .

## المطلوب

- 1- حدد مقادلات دالة الهدف والتفريد لهذه المشكلة.
- 2- أوجد الحل الأمثل عن طريق استخدام طريقة التحليل البياني وطريقة السيمبلكس؟  
(الحل ميل دالة الهدف =  $1/4$  و  $50 = Z$ ,  $2.5 = Y$ ,  $0 = X$ )
- 12- تقوم ورشة بإنتاج نوعين من المصنوعات الخشبية (X, Y) وتحتاج كل وحدة من (X) إلى 30 قدماً مكعباً من الخشب و5 ساعات عمل، وتعطي ربحاً قدره 26 ديناراً. أما الوحدة من (Y) فتحتاج إلى 20 قدماً مكعباً من الخشب و10 ساعات عمل، وتعطي عائداً قدره 20 ديناراً. فإذا كانت الورشة لا يمكنها توفير أكثر من 300 قدم مكعب من الخشب و110 ساعات عمل خلال الأسبوع. المطلوب: إيجاد الحل الأمثل لهذه المشكلة بواسطة استخدام طريقة الرسم البياني.

س13- يصنع مصنع للأعمال المعدنية نوعين من الشبائك ذات الحجم المتوسط (أ، ب)، ويعطي كل شباك من النوع (أ) ربحاً قدره 15 ديناراً، ويعطي كل شباك من النوع (ب) ربحاً قدره 15 ديناراً، ويعمل كل شباك من النوعين خلال ثلاثة أقسام إنتاجية، وهي قسم القطع تقسم اللحام ثم قسم الصنفرة، وقد كانت المعلومات المتعلقة بعدد الساعات المتاحة في هذه الأقسام الثلاثة، وما يحتاجه كل منتج من وقت في كل منها مبينة في الجدول التالي:

القسم	الوقت الذي يحتاجه كل شباك واحد في كل قسم		الطاقة الإنتاجية بالساعات
	أ	ب	
قسم القطع	2	3	1500 ساعة
قسم اللحام	3	2	1500 ساعة
قسم الصنفرة	1	1	600 ساعة

المطلوب: ما هو عدد الشبائك الذي يجب أن ينتجه هذا المصنع من النوعين، والذي يجعل الأرباح أكبر ما يمكن، مستخدماً في ذلك طريقة التحليل البياني؟

س14- مصنع للمسابير به ثلاثة أنواع من الآلات تقوم بإنتاج نوعين من المسابير. والطاقة الإنتاجية لهذه الآلات تكون كالآتي:

الآلة الأولى	50 ساعة
الآلة الثانية	36 ساعة
الآلة الثالثة	81 ساعة

الساعات المتاحة في قسم التجميع لا يزيد عن 90 ساعة عمل وعدد الساعات المتاحة في قسم الاختيار والتغليف 48 ساعة عمل. وكان ربح البطارية 6 فولت يبلغ 8 دنانير وربع البطارية 12 فولت 10 دنانير. باستخدام طريقة التحليل البياني أوجد الكميات المثالية الواجب أن يقوم المصنع بإنتاجها من كل نوع حتى يتم تحقيق أقصى ربح ممكن.

س8- حدد منطقة الحل المتاحة باستخدام الرسم البياني مع استبعاد القيود المتكررة:

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 &\leq 4 \\ 4X_1 + 3X_2 &\leq 12 \\ -X_1 + X_2 &\geq 1 \\ X_1 + X_2 &\leq 6 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

س9- باستخدام طريقة السيمبلكس قل

$$\text{Min. } C = 5X_1 + 3X_2 - 2X_3$$

بشرط أن:

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 + X_3 &\leq 5 \\ X_1 - 2X_2 - X_3 &\leq 4 \\ X_1 + 3X_2 + 2X_3 &\leq 15 \\ X_1, X_2, X_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

س10- معادلة الهدف لإحدى مشاكل البرمجة الخطية والتي تركز على القيمة المظني للمنتج هي كالآتي:

$$\text{Max. } Z = 25X + 5Y$$

ما هو ميل المنحنى لهذا الهدف (الحل = 5)؟

س11- تحقق شركة الحاسبات البسيطة ربحاً قدره 5 دنانير من الموديل (X) و20 ديناراً من كل وحدة واحدة من الموديل (Y). كل حاسبة واحدة تحتاج إلى زمن معين (دقائق) من خلال عملية التغليف والاختيار الآلي والجدول التالي يبين ذلك:

الزمن المتاح	متطلبات Y	متطلبات X	
10	4	2	التغليفات
12	3	6	الاختبارات

الآلة				المنتج
الآلة (4)	الآلة (3)	الآلة (2)	الآلة (1)	
S	10	6	16	12 دقيقة
T	20	8	12	10 دقيقة
الطاقة الإنتاجية	4800	3600	6000	6000 دقيقة
التكلفة/الدقيقة	300	500	300	500 درهم

وكان الطلب على المنتج (S) هو 600 وحدة، و300 وحدة من المنتج (T).

المطلوب/ أوجد الخطة الإنتاجية التي تحمل مجموع خسائر تشغيل الآلات أقل ما يمكن، مستخدماً في ذلك طريقة التحليل البياني.

س17 - يحتوي غذاء الأطفال على الأقل 25% من البروتين، ولا يتعدى 70% من الكربوهيدرات، وهذه المواد هي نسب من مواد أخرى، تمزج لتعطي غذاء الطفل وهي كما يلي:

D	C	B	A
60	70	80	80
30	20	15	10
20	15	10	5

% كربوهيدرات  
% بروتين  
الربح لكل جرام بالدينار

المطلوب: أوجد الحل الأمثل بواسطة استخدام طريقة السيمبليكس، والذي يحل الأرباح أكبر ما يمكن؟

س18 - مصنع للأقمشة ينتج ثلاثة أنواع من الملابس (A, B, C) التي تحتاج لإنتاجها صوفاً من لونين أحمر وأخضر وتحتاج كل وحدة طويلة من (A) ثلاثة أمتار من الصوف الأحمر، ومتر من الأخضر، وتحتاج كل وحدة طويلة من (B) أربعة أمتار من الصوف الأحمر، وثلاثة من الصوف الأخضر. وتحتاج كل وحدة من (C) لمتر واحد من الصوف الأحمر، ومترين من الأخضر. والربح الناتج من بيع الوحدة الطويلة من (A) هو ثلاثة دينار، ومن (B) هو ستة دينار، ومن (C) هو دينار. ولا يمتلك المصنع أكثر من عشرين متراً من الصوف الأحمر، وعشرة أمتار من الصوف الأخضر. كيف يمكن استخدام الصوف المتاح في هذا المصنع لتعظيم الأرباح، وذلك باستخدام السيمبليكس؟

س19 - شركة المستلزمات الزراعية لها ثلاث مزارع (A, B, C)، مساحتها على التوالي (300, 600, 700) هكتار. وتبني الشركة زراعة تلك المزارع بثلاثة أنواع مختلفة

والنوعان من المسامير يمكن إنتاجهما على هذه الآلات الثلاث، ولقد كان الوقت اللازم لتصنيع قنطار من كل نوع على كل آلة والربح المتوقع لذلك مبيّن في الجدول التالي:

الإنتاج	الآلة			صافي الربح/دينار
	الآلة الأولى	الآلة الثانية	الآلة الثالثة	
إنتاج النوع الأول/ قنطار	10	6	4.5	9
إنتاج النوع الثاني/ قنطار	18	6	18	7

المطلوب: ما هو عدد القناطير من المسامير التي يجب أن ينتجها المصنع من النوعين والذي يحقق أعلى ربح ممكن؟

س15 - مصنع للمواد الكيماوية ينتج ثلاثة أنواع من المواد (أ، ب، ج). ولكن الاستراتيجية التي يجب أن يتبعها هذا المصنع لتغطية الطلب من هذه المواد هي أن يقوم بضرورة إنتاج ما لا يقل عن 4 أطنان من المنتج الأول (أ)، و2 طن من المنتج (ب)، و1 طن واحد من المنتج (ج) في اليوم. ويتم إنتاج هذه المواد من مكوّنين آخرين هما: (س، ص) حيث يعطي كل طن من (س) ربع طن من (أ)، وربع طن من (ب) و(1/12) طن من (ج). ويعطي كل طن من (ص) (1/2) طن من (أ)، و(1/10) طن من (ب)، و(1/12) طن من (ج). فإذا كان المكوّن (س) يكلف 250 ديناراً للطن الواحد، والمكوّن (ص) يكلف 400 دينار للطن الواحد، وتكلفة التشغيل هي 250 ديناراً لكل طن من (س)، و200 دينار لكل طن من (ص). ضيع هذه المشكلة في صورة برمجة خطية، ثم أوجد الحل لها الذي يجعل التكاليف أقل ما يمكن، مستخدماً طريقة التحليل البياني، علماً بأن الكمية المنتجة التي تزيد عن حجم الطلب اليومي ليست لها قيمة، نظراً للمتغيرات الكيماوية التي ستحصل عليها، إن لم تستخدم في الحال.

س16 - مصنع صغير ينتج نوعين من السلع البلاستيكية (S, T)، والتي يتطلب إنتاجها موردها في عمليتين إنتاجيتين، تجري العملية الأولى إما في الآلة رقم (1)، أو الآلة (2). وتجري العملية الثانية إما في الآلة رقم (3)، أو الآلة رقم (4). فإذا كان وقت التشغيل لكل آلة لإنتاج وحدة إنتاجية واحدة، والطاقة الإنتاجية لكل آلة، وتكلفة كل وحدة زمنية عند تشغيل أي آلة من الآلات مبيّنة في الجدول التالي:

أكثر منه 3000 بحار في أي وقت لتزويد طاقم السفن الحديدية، علماً بأن متوسط عدد أفراد طاقم السفينة من أي نوع هو 1000 شخص.

المطلوب: ما هو عدد السفن التي يجب شراؤها من كل نوع إذا أرادت المؤسسة أن تفي طاقاتها من العن / ميل في اليوم، وذلك باستخدام طريقة السيمبلكس؟

من المحاصيل ( $K, L, M$ )، وبين الجدول التالي معلومات عن عدد الوحدات التي ينتجها كل هكتار، والحد الأعلى للمبيعات التي يمكن بيعها، والماء المحتاج إليه والرياح المتوقع من بيع الوحدة الواحدة من المحاصيل الثلاثة:

المحصول	الوحدة/هكتار	أعلى المبيعات	الماء/الهكتار	الرياح/الوحدة
K	25	20000	5	6
L	20	25000	4	4
M	21	850	3	2

فإذا اعتبر الماء المستهلك من العوامل المهمة والمحدودة، وحددت كمية الماء الموجودة في المزارع، فكانت كالآتي: 2800 لتر مكعب في المزرعة (A)، و2000 لتر مكعب في المزرعة (B)، و1000 لتر مكعب في المزرعة (C). ضح هذه المشكلة في صورة برمجة خطية لتقدير ما الذي يجب إنتاجه عند كل مزرعة، علماً بأنه يمكن زرع أية خاتمة من تلك المحاصيل في أية مزرعة:

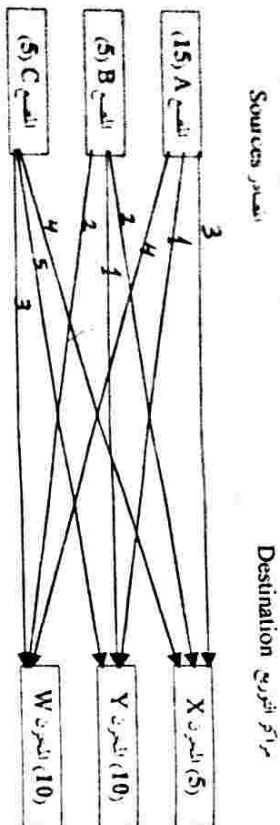
س20- ترغب المؤسسة الوطنية للنفط في نقل النفط الخام من الموانئ، اللبنة إلى الدول المستوردة للمادة الخام (إيطاليا، ألمانيا، وغيرها). في نفس الوقت تحتاج إلى تحديد حجم ونوع وطبيعة السفن، التي تكون أكثر اقتصاداً قبل التقدم لشراؤها، كما ترغب الشركة في عدم صرف أكثر من 400 مليون دينار لمشروع شراء السفن. وقد انتهت المؤسسة إلى اختيار ثلاثة أنواع من هذه السفن بعد أن تبين لها أنها تمثل أفضل الأنواع لنقل المادة الخام بأقل فاقد من المنتج، وأقصى درجة من الأمان، ويمكن أن نرمر إلى هذه الأنواع الثلاثة من السفن بالرمز ( $C1, C2, C3$ ). السفينة  $C1$  حمولتها 10000 طن وسرعتها 35 ميلاً بحرياً في الساعة، ويقدر ثمنها 8 ملايين دينار. والسفينة ( $C2$ ) حمولتها 20000 طن وسرعتها 30 ميلاً بحرياً في الساعة، ويقدر ثمنها 13 مليون دينار. أما السفينة ( $C3$ ) فحمولتها 18000 طن وسرعتها 30 ميلاً بحرياً في الساعة، ويقدر ثمنها 15 مليون دينار. وتحتاج هذه السفينة بأنها موزدة بكاسحات ثلوج، مما يجعلها صالحة للعمل في المناطق المتجمدة التي اكتشف فيها آبار للبتروك. وتستخدم السفينة ( $C1$ ) وقوداً غالي الثمن، ولكن تحرق منه كميات قليلة. ويقدر متوسط مصاريف التشغيل في اليوم بما في ذلك العمالة الخ بحوالي 3000 دينار. أما السفينتان ( $C2, C3$ ) فتستخدمان وقوداً أقل ثمناً من الذي تستخدمه السفينة ( $C1$ ) ولكنهما تستهلكان كمية أكبر، ويقدر متوسط مصاريف التشغيل في اليوم لكل منهما 6000 دينار.

وبالنسبة للقيمة الاقتصادية للمنتجات التي تقوم المؤسسة ببيعها، فإن مصاريف التشغيل لكل الاسطول يجب ألا تزيد عن 150000 دينار في اليوم، وقد قدر أنه لن يتاح

الأجهزة من المصنع C إلى المخازن الثلاثة عند تكلفة قدرها (3، 5، 4) وتأثير للجهاز الواحد على التوالى.

المطلوب وضع هذه المشكلة في صورة مشكلة نقل. ثم أوجد الحل الأمثل الذي يوضح كيفية نقل هذه الأجهزة من المصانع الثلاثة إلى المخازن الثلاثة وذلك عند أدنى تكلفة ممكنة.

الآن يمكن توضيح هذه المشكلة بيانياً (1 - 4) بحيث توضح فيها المصانع الثلاثة، والمخازن الثلاثة، مصحوبة بالطاقات الإنتاجية والتخزينية، كما تمثل الأسهم خطوط النقل من المصانع إلى المخازن، مفرزة بكلغة كل خط على حدة.



جدول (1 - 4) المصانع الثلاثة والمخازن الثلاثة، مصحوبة بالطاقات الإنتاجية والتخزينية وتعتبر مشكلة النقل فصيلاً رياضية من فصول البرمجة الخطية حيث يمكن عرض هذه المشكلة بشكل نموذج برمجة خطية ومعالجتها بأحدى الطرق. ولحل مشاكل النقل، فإنه يجب استخدام نفس الخطوات الأساسية لحل مشاكل البرمجة الخطية، ولكن في مشاكل النقل تكون إجراءات الحل مختلفة.

#### ■ الخطوات الأساسية لحل مشاكل النقل

- 1- تحديد طبيعة مشكلة النقل (الهدف)، هل هي مشكلة تتعلق بالوصول إلى أقل تكلفة (كما هو موجود في المثال السابق) أو تحقيق أعلى ربح ممكن؟
- 2- بناء نموذج النقل، وإيجاد التوزيع المبدئي الممكن. يوجد هناك العديد من الطرق لإيجاد التوزيع المبدئي منها:

- I - طريقة الزاوية الشمالية الغربية North West Corner Method
- II - طريقة الأقل تكلفة أو أقل الأسعار Least Cost Method
- III - طريقة الجراء Penalty Method أو طريقة فوجل Vogel's Approximation Method

## الفصل الرابع

### نماذج النقل

#### Transportation Models

#### المقدمة:

مشكلة النقل هي عبارة عن حالة خاصة من حالات البرمجة الخطية، التي سبق نقاشها في الفصل السابق، بمعنى أن هذا النوع من المشاكل يمكن حله باستخدام البرمجة الخطية، إلا أن الأسلوب الذي يوفره نموذج النقل هو أكثر فاعلية وسرعة في الحل. وكذلك يوجد هناك بعض المشاكل لها خصائص ومواصفات تتفرد بها عن بقية المشاكل الخطية، وهذه المشاكل هي ما تعرف بمشاكل النقل. وتعتبر مشكلة (نموذج) النقل من الأساليب الرياضية الهامة المساعدة في عملية اتخاذ القرار الملائم في نقل كمية من المواد (السلع) من مصادر Sources تصنيعها أو المخازن إلى مراكز متعددة Destinations كالمخازن، وذلك بما يجعل مجموع تكاليف هذا النقل أقل ما يمكن. كما تخصص طريقة النقل في توزيع الموارد البشرية والمادية بأفضل صورة على اعتبار أن هذه الموارد محدودة دائماً. إلا أن تطبيقات هذه التقنية اليوم تعدت مجرد النقل المادي للمواد، لتتناول جوانب أخرى مثل: خطط التمويل، تحديد الأعمال التي يجب أن تنفذها الآلات، والتخطيط للدعاية والإعلان وغيرها. والمثال رقم (1) التالي يبين أهم العناصر التي تدخل في مشكلة النقل.

مثال رقم (1):

نفرض أن هناك مشروعاً معيناً في مدينة طرابلس ليبيا، يمتلك ثلاثة مصانع A, B, C تنتج منتجاً معيناً، ولكن هذا المنتج أجهزة مرئية (TV)، وأن الطاقة الإنتاجية لهذه المصانع الثلاثة وعلى التوالي هي (5، 5، 15) ونفرض أيضاً أن هذا الإنتاج يتم نقله إلى ثلاثة مخازن هي (X, Y, W) طاقاتها التخزينية على التوالي (10، 10، 5). ويتم نقل هذه الأجهزة من المصنع A إلى المخازن (X, Y, W) وذلك بتكلفة (4، 1، 3) دينار ليني للجهاز الواحد على التوالي. كما يتم نقل هذه الأجهزة من المصنع B إلى المخازن الثلاثة عند تكلفة قدرها (2، 1، 2) دينار للجهاز الواحد على التوالي. كذلك يتم نقل هذه

جدول (4-2) ملخص للمشكلة  
الحالة المتجة للمصانع (المريض)  
المخازن  
المصانع

	X	Y	W	
A	3	1	4	15
B	2	1	2	5
C	4	5	3	5

الجدول (4-2) يمثل ملخصاً للمشكلة المطروحة وهو من النوع (3 × 3) أي ثلاثة مصانع في ثلاثة مخازن. حيث إن القيمة الموجودة داخل الخلية (A X) تمثل تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المصدر (المصنع) (A) إلى الوجهة (المخزن) (X). أما هدفنا من نموذج النقل فهو إيجاد أقل تكلفة لنقل المواد من المصانع المختلفة إلى المخازن المختلفة وذلك من خلال عدد المواد المراد نقلها من مصنع ما إلى مخزن ما ولكافة المصانع والمخازن ويمكن تحقيق هذا الهدف وذلك من خلال حل المعادلات الخطية التالية:

النموذج الرياضي لمشكلة النقل:

بافتراض أن عدد الأجهزة التي يتم نقلها من المصنع A إلى المخزن X يرمز لها بالرمز  $T_{11}$  .. وهكذا بالنسبة لبقية الأجهزة التي سوف تنقل من مصانعها إلى مخازنها يرمز لها

حسب موقع الخلية أو الحجيعة مع الرمز (T) الذي يمثل عدد الأجهزة التي سوف تنقل .  
دالة الهدف:

$$\text{Min. Z cost} = 3T_{11} + 1T_{12} + 4T_{13} + 2T_{21} + 1T_{22} + 2T_{23} + 4T_{31} + 5T_{32} + 3T_{33}$$

القيود:

$$T_{11} + T_{12} + T_{13} = 15$$

$$T_{21} + T_{22} + T_{23} = 5$$

$$T_{31} + T_{32} + T_{33} = 5$$

وأن

$$T_{11} + T_{21} + T_{31} = 5$$

$$T_{12} + T_{22} + T_{32} = 10$$

$$T_{13} + T_{23} + T_{33} = 10$$

### III - طريقة المفاضلة المزدوجة.

ولكي يكون هذا الحل حلاً ممكناً لا بد أن تتوفر فيه الشروط التالية:

I - يجب توزيع أو نقل جميع الوحدات الموجودة في أي من المصانع إلى مخازنها (المريض = الطالب).

II - يجب ألا يكون هناك أية فراغات غير مستغلة في أي مخزن من المخازن.

III - يجب أن يتساوى عدد الخلايا أو الحجيرات أو المربعات المستخدمة مع عدد الصفوف، مضافاً إليها عدد الأعمدة، ومطروحاً منها واحد  $(m + n - 1)$ .

3- يجب استخدام إحدى الطرق الأخرى للتأكد من أن الحل هو الحل الأمثل أم لا، وهذه تتم بإحدى الطرق التالية:

I - طريقة التوزيع المعدلة (MODI) (النخطي) Modified Distributing Method  
II - طريقة حجر النقل (النخطي) Stepping Stone Method

4- في حالة ما نكون قد توصلنا إلى الحل الأمثل، تكون المشكلة قد حلت. وإن لم يكن كذلك. فيجب الانتقال إلى حل ممكن أفضل.

5- يجب الرجوع إلى الخطوة الثالثة مرة أخرى، لمعرفة ما إذا كان الحل الأخير المتحقق في الخطوة التالية هو الحل الأمثل ... وهكذا.

أولاً: مشكلة البحث عن أقل تكلفة ممكنة:

حل مثال رقم (1) المتعلق بالبحث عن أقل تكلفة ممكنة:



لاحظ أن القيمة التي بداخل المربعات أو الحجيرات أو الخلايا تمثل تكلفة نقل جهاز واحد من المصنع إلى المخزن وهي كما يلي:

$$AX = 3, AY = 1, AW = 4$$

$$BX = 2, BY = 1, W = 2$$

$$CX = 4, CY = 5, CW = 3$$

الآن يمكن اختصار الجدول السابق كالآتي:

جدول (4-4) المختصر

	3	1	4	15
	2	1	2	5
	4	5	3	5

5 10 10

– نبدأ بالزاوية الشمالية الغربية ونحدد عدد الأجهزة التي يسمح بقلها من المصنع A إلى المخزن X، حيث يصبح عدد الأجهزة المسموح والمتاح نقلها إلى الزاوية الشمالية الغربية تساوي خمسة أجهزة فقط، لأن عدد الأجهزة التي يمكن تخزينها في المخزن X خمسة أجهزة فقط، وهي تمثل أقل من عدد الأجهزة التي تم إنتاجها من المصنع A، وبعد هذا نصغر الأصعدة التي لا يمكن التخزين فيها، لأن الطاقة التخزينية للأجهزة استغلت كلياً في المربع الذي يمثل الزاوية الشمالية الغربية. وبهذا فإن:

$$AX = 5, BX = 0, CX = 0$$

جدول (4-5)

	3	1	4	10
5	2	1	2	5
0	4	5	3	5

0 10 10

– ننقل إلى المربع أو الخلية الأخرى (شريطة أن لا يكون فيها عدد الأجهزة مساوياً للمصنر) ونكرر الخطوة الأولى.

ولإيجاد قيمة التكلفة (Cost) لا بد من حل هذه المعادلات لاستخراج عدد الأجهزة المراد نقلها من مصدر ما (المصنع) إلى وجهة ما (المخزن)، وكلما زاد عدد هذه المعادلات (زيادة عدد المصادر أو زيادة عدد الوجهات أو زيادة عدد المصادر والوجهات معاً) زادت صعوبة حلها. ولغناهي حل هذه المعادلات تستخدم عدة طرق لإيجاد التكلفة نبرز منها:

#### طرق لإيجاد التوزيع البديهي:

##### 1- طريقة الزاوية الشمالية الغربية North West Corner Method:

يتم استخدام هذه الطريقة لإيجاد التكلفة، وذلك حسب الخطوات التالية:

- يبدأ بأول خلية أو حجرة أو مربع من اليسار والذي يقع في الزاوية الشمالية الغربية.
- يختار عدد المواد (الأجهزة TV) ليصبح مساوياً لعدد الطلبات (طاقة التخزين) أو العرض (طاقة إنتاج المصنع) أيهما أقل.
- يشرح عدد المواد من الطلب والعرض وصفر عدد المواد باتجاه الطلبات إذا كانت نتيجة الطلب مساوية للصفر (بعد عملية الطرح) أو باتجاه العرض إذا كانت نتيجة العرض مساوية للصفر.
- ينتقل إلى المربع الذي يليه.
- إذا كانت قيمة المواد في أحد المربعات مساوية للصفر فانقر عنه.
- لاحظ أن عملية المرور بالمربعات أو الخلايا تكون بشكل متتابع في السطر الواحد وباتجاه اليمين وعند الانتهاء من السطر يتم الانتقال إلى السطر الثاني وهكذا.
- يمكن الآن استخدام المثال رقم (1) لإيجاد أقل تكلفة لنقل الأجهزة من ثلاثة مصانع إلى ثلاثة مخازن وذلك بواسطة استخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية.

##### جدول (3-4) يبين التوزيع حسب طريقة الزاوية الشمالية الغربية

الطاقة الإنتاجية للمصانع (العرض)

الزاوية الشمالية الغربية المخازن

المصانع

	X	Y	W	
A	3	1	4	15
B	2	1	2	5
C	4	5	3	5

السعة التخزينية للمخازن (الطلب)

5 10 10

جدول (4-6)

3	1	4	0
5	10	0	
0	2	1	2
0	0	5	3
0	4	0	5
0	0	10	

- نكرر الخطوة الأولى.

جدول (4-7)

3	1	4	0
5	10	0	
0	2	1	2
0	0	5	3
0	4	0	5
0	0	10	

جدول (4-8)

3	1	4	0
5	10	0	
0	2	1	2
0	0	5	3
0	4	0	5
0	0	10	

وبهذا فإن مجموع التكاليف بعد توزيع كل الأجهزة المصنعة في المخازن المناسبة لها في هذا الجدول السابق تكون كالآتي:

$$\text{Total Transport Cost} = 5(3) + 10(1) + 0(4) + 0(2) + 0(1) + 5(2) + 0(4) + 5(3) \\ = 15 + 10 + 10 + 15 = 50$$

2- طريقة الأقل تكلفة أو أقل الأسعار Least Cost Method :

تم عملية التوزيع لإيجاد أقل تكلفة باستخدام هذه الطريقة حسب الخطوات التالية:

- لاحظ كل المربعات أو الحجرات أو الخلايا وحدد المربع الذي يمثل أقل تكلفة للوحدة الواحدة، ثم حدد عدد الأجهزة المطلوبة اعتماداً على قيم الطلبات والعرض المناظرة (أيها أقل) وصفر الأعمدة باتجاه الصفر.

- انتقل إلى مربع آخر يمثل أقل تكلفة للوحدة الواحدة بعد تطبيق الخطوة الأولى وكرر هذه الخطوة (مع ملاحظة القفز عن المربع الذي عدد الأجهزة فيه يساوي الصفر) وهكذا حتى يتم تصفير الطلب والعرض في كافة الأعمدة Columns والصنوف Rows. وباستخدام المثال رقم (1) يمكن تطبيق هذه الطريقة وهي كالآتي:

جدول (4-9)

3	#	4	15
2	1	2	5
4	5	3	5
5	10	10	

تم اختيار الخلية أو المربع (AY) والذي وضعت له علامة (#)، لأنه يمثل أقل تكلفة أو سعر للوحدة الواحدة من الأجهزة (TV). لاحظ أنه يوجد تكلفة أو سعر آخر في المربع (BY) ومساوية إلى أقل تكلفة السابقة (1)، ولكنه تم اختيار العمود هذا (AY) نظراً لأن الرقم 10 المناظر أعلى من الرقم 5 المناظر للعمود الثاني:

نطبق الخطوة الأولى فنحصل على:

جدول (4-10)

3	1	4	5
10	1	2	5
0	5	3	5
4	0	3	5
5	0	10	

جدول (4-6)

3	1	4	0
5	10	0	
0	2	1	2
0	0	5	3
0	4	0	5
0	0	10	

- نكرر الخطوة الأولى.

جدول (4-7)

3	1	4	0
5	10	0	
0	2	1	2
0	0	5	3
0	4	0	5
0	0	10	

جدول (4-8)

3	1	4	0
5	10	0	
0	2	1	2
0	0	5	3
0	4	0	5
0	0	10	

وبهذا فإن مجموع التكاليف بعد توزيع كل الأجهزة المصنعة في المخازن المناسبة لها في هذا الجدول السابق تكون كالآتي:

$$\text{Total Transport Cost} = 5(3) + 10(1) + 0(4) + 0(2) + 0(1) + 5(2) + 0(4) + 5(3) \\ = 15 + 10 + 10 + 15 = 50$$

2- طريقة الأقل تكلفة أو أقل الأسعار Least Cost Method :

#### جدول (4 - 11)

3	1	4	5
0	10		
5	2	1	2
0	0	0	0
0	4	5	3
0	0	#	5

0 0 10

#### جدول (4 - 12)

3	1	4	5
0	10	#	
5	2	1	2
0	0	0	0
0	4	5	3
0	0	5	5

0 0 5

#### جدول (4 - 13)

3	1	4	0
0	10	5	
5	2	1	2
0	0	0	0
0	4	5	3
0	0	5	5

0 0 0

$$\text{Cost} = 10(1) + 5(4) + 5(2) + 5(3) = 10 + 20 + 10 + 15 = 55$$

#### 3- طريقة الجزاء Vogel's Approximation Method

Penalty Method أو طريقة فوجل العقابية

يمكن تلخيص خطوات إيجاد التكلفة حسب هذه الطريقة في ما يلي:

- بناء عمود الجزاء وذلك بأخذ حاصل طرح أقل تكلفتين في الصف المناظر.

- بناء صف الجزاء وذلك بأخذ حاصل طرح أقل تكلفتين في العمود المناظر.
- تحديد أعلى جزاء واختيار أقل تكلفة مناظرة ثم اختيار الطلب أو العرض (أيهما أقل) لتكون قيمة عدد الموارد (الأجهزة) المراد نقلها.
- كرر هذه الخطوات حتى تستهلك كافة الطلب والعرض (تصبح فيها مساوية للصفر)
- نستخدم نفس المثال السابق (1) لشرح هذه الطريقة:

#### جدول (4 - 14)

3	#	4	15
2	1	2	
4	5	3	
5	10	10	
5	1	2	
4	5	3	

$$(3 - 2) = 1 \quad (1 - 1) = 0 \quad (3 - 2) = 1$$

صف الجزاء

#### جدول (4 - 15)

2	10	1	4	5
0	1		2	5
4	0	5	3	5
5	10	10		
5	1	2		
4	5	3		

$$(3 - 2) = 1 \quad (3 - 2) = 1$$

صف الجزاء

- داخل جدول النقل سوف نتحصل على بعض الخلايا التي تحتوي على إشارتين (VV)، وهذا يدل على أن هذه الخلية تحتوي على أقل تكلفة نقل ممكنة من بين هذه الصفوف والأعمدة.

- يجب وضع أكبر كمية من الخلية التي تحتوي على الإشارتين (VV)، ونضع خطوط فراغ بالنسبة للخلايا الفارغة.

- بعد أن نملا جميع الخلايا ذات الإشارتين (VV) نجد أن هناك بعض المستهلكين الذين لم يتحصلوا على طلبهم كاملاً أو جزئياً. ولذا نبدأ في ملء المربعات ذات الإشارة (V) ونفس الأسلوب السابق. وهذا يعني أننا وزعنا باقي الاحتياط على المخازن وذلك حسب القيمة التي تمثل أقل تكلفة لعملية النقل.

جدول (4 - 18)

	3	4	15
3	VV	1	
2	V	VV	1
4		5	V
5		3	5

إذا حسب هذا الجدول نبدأ في ملء الخلايا التي تحتوي على الإشارتين VV ويكون الجدول كالآتي:

جدول (4 - 19)

	3	4	15
V	10	1	
2	-	1	
4	-	5	V
5		3	5

كرر نفس الإجراء السابق إلى أن تصل إلى الحل.

جدول (4 - 16)

	3	1	4	0
5	10	0		
2	0	1	2	5
4	0	5	3	5
0		#		

صف الجراء

جدول (4 - 17)

	3	1	4	0
5	10	0	2	0
0	2	1	5	0
4	0	5	3	0
0		5		

صف الجراء

$$\text{Cost} = 5(3) + 10(1) + 5(2) + 5(3) = 15 + 10 + 10 + 15 = 50$$

- لاحظ أن نتائج الطرق الثلاثة قد تختلف، ولكن نلاحظ أن هذه المشكلة لم تحقق القانون  $(m + n - 1)$  ويعني هذا أن هذه النتيجة تحدث إلا في حالة واحدة وهي الحالة التي تكون فيها المواد المتاحة في أحد المصادر متساوية تماماً لاحتياجات إحدى الوجهات (المركز التسويقي)، وعند نقل هذه السلع من المصدر إلى هذا المركز فإن هذا سوف يؤدي إلى تقاد هذه السلعة وفي هذه الحالة فإن  $(m + n - 1)$  سوف لا تتحقق.

#### 4 - طريقة الملاحظة المبروجة:

إذا كانت مشكلة النقل ذات حجم كبير ورها العديد من الصفوف والأعمدة، فإن

اختيار العناصر فيه بالشكل الذي سبق ذكره في الطرق السابقة يكون صعباً ولذا فإنه يفضل

استخدام طريقة الملاحظة المبروجة في هذه الحالة. وتتلخص فكرة هذه الطريقة بما يلي:

- في كل صف نضع الإشارة (V) في الخلية التي يوجد بها أقل تكلفة.
- في كل صف نضع الإشارة (V) في الخلية التي يوجد بها أقل تكلفة.

العرض مساوية إلى (5) وتكلفة النقل لكل مداخل هذا السطر تكون مساوية للصفر وهي كما يلي:

جدول (4-23)

	D1	D2	D3	Supply
S1	2	5	4	10
S2	3	7	6	10
S3				
S4	2	8	4	10
Dummy Row	10	15	10	5
Demands	10	15	10	

وبعد عملية الموازنة هذه يمكن استخدام إحدى الطرق السابقة لإيجاد تكلفة النقل. وفي بعض الحالات قد يكون مجموع العرض أكبر من مجموع الطلب، وهنا لا بد من إضافة عمود جديد تكون فيه قيمة الطلب مساوية لقيمة الفرق بين العرض والطلب. أما تكلفة كل مدخل من مداخل هذا العمود فتكون مساوية للصفر والمثال التالي (مثال رقم 3) يوضح نموذج النقل وكيفية موازنة هذا النموذج.

جدول (4-24)

	D1	D2	D3	Supply
S1	2	5	4	10
S2	3	7	6	10
S3	2	8	4	51
Demands	10	10	10	

جدول (4-20)

	3	1	4	15
-	10	V		
5	2	1	2	5
	4	5	VV	3
-	-	-		5
5	10	10	10	

جدول (4-21)

	3	1	4	15
-	10	5		
5	2	1	2	5
	-	-		
4	5	5	3	5
-	-	-		
5	10	10	10	

#### نموذج النقل غير المتوازن : Unbalanced Transportation Problem

في بعض الحالات نجد أن عدد الوحدات المعروضة (العرض) لا تتساوى مع عدد الوحدات المطلوبة (الطلب)، أو بالعكس، فيحدث ما نسميه بعدم التوازن بين العرض والطلب وهنا ما يسمى بالنموذج غير المتوازن. ولإيجاد أقل تكلفة لمشكلة النقل في حالة النموذج غير المتوازن فلا بد أولاً من موازنة النموذج ثم بعد ذلك يمكن استخدام إحدى الطرق السابقة لإيجاد التكلفة. فمثلاً النموذج التالي (مثال رقم 2) يبين عدم التوازن:

جدول (4-22)

	D1	D2	D3	Supply
S1	2	5	4	10
S2	3	7	6	10
S3	2	8	4	10
Demands	10	15	10	

نلاحظ في الجدول السابق أن مجموع الطلب (35) أكبر من مجموع العرض (30)، ولموازنة هذا النموذج لا بد من إضافة صف جديد (Dummy Row) تكون فيه قيمة

الخلايا أو الحجيرات بداخل الجدول، ولو فرضنا في هذا المثال أننا استخدمنا طريقة الأقل تكلفة يكون التوزيع كالآتي:

جدول (4-27)

	D1	D2	D3	D4	
2500					S3
	3	2	7	6	Supply
S1	1000	4000			5000
	7	5	2	3	
	2500		2000	1500	
S2		2	5	4	6000
	2500			5	
Demands	6000	4000	2000	1500	13500

$$\text{مجموع التكاليف} = (2)1500 + (2)2000 + (7)4000 + (3)1000 = 42000$$

$$= 5000 + 4500 + 4000 + 17500 + 8000 + 3000 =$$

2- تقويم الخلايا غير المستغلة على طريقة الحجر المتقل:

يتم بهذه الطريقة الوصول إلى الحل الأمثل وذلك عن طريق أخذ جدول الحل النهائي حيث تمثل المواقع أو المربعات أو الخلايا المشغولة فيه بالصخور (المملوءة بالكميات) والمخول غير المشغولة بالمخول المائية (غير المملوءة بالكميات) ويتم تكويرين طريق معلق يبدأ من الموقع المائي (الحلية التي لا توجد بها الكميات) في الجدول (28-4) ويتجه الصخور (الخلايا التي بها الكميات) حتى الرجوع لهذا الموقع، وبهذا يظهر جدول الحل النهائي كما يلي:

جدول (4-28)

	D1	D2	D3	D4	
2500					S3
	3	2	7	6	Supply
S1	1000	4000			5000
	7	5	2	3	
	2500		2000	1500	
S2		2	5	4	6000
	2500			5	
Demands	6000	4000	2000	1500	13500

الآن يمكن أن نستخرج التكلفة المتزايدة أو المتناقصة لكل مربع أو حلية لا توجد

جدول (4-25)

	D1	D2	D3	D4	
10					S3
	2	5	4	0	Supply
S1		3	7	6	10
S2		2	8	4	15
Demands	10	10	10	5	

طرق للتأكد من الوصول إلى الحل الأمثل:

بعد استخدام الطرق السابقة لعملية التوزيع وإيجاد التوزيع المبدئي للمشكلة يجب التأكد من أن هذا الحل هو الأمثل والذي يؤدي إلى أقل تكلفة ممكنة. يوجد هناك العديد من الطرق التي تساعدنا على الوصول إلى الحل الأمثل ومن بين هذه الطرق هي:

1- طريقة حجر النقل (التخطي) Stepping Stone Method:

سوف نبين كيفية استخدام هذه الطريقة من خلال المثال رقم (4) التالي: لنفرض أن الجدول الآتي يبين العرض والطلب والتكاليف اللازمة لعملية النقل بين المصدر والمستهلك.

جدول (4-26)

	D1	D2	D3	D4	
2500					S3
	3	2	7	6	Supply
S1		7	5	2	5000
S2		2	5	4	6000
Demands	6000	4000	2000	1500	13500

1- وضع التوزيع في صورة جدول وإجراء التوزيع المبدئي:

من خلال هذا الجدول يمكن استخدام إحدى الطرق السابقة (طريقة الزاوية الشمالية الغربية أو طريقة الأقل تكلفة أو طريقة الجراء) لتوزيع هذه الكميات داخل المربعات أو



المفضل أن نختار من بين الخلايا غير المستقلة تلك التي تحقق تحقيق أكبر وفورات في التكاليف (أي تلك التي تكون نتيجة تقويمها أكبر قيمة مطلقة بإشارة سالبة). وفي هذا المعال نجد أن هناك خلية واحدة هي (S2 D2) (الخلية المظللة) قيمتها تساوي (1-). ولكن ما هو الحد الأقصى لعدد الوحدات التي يمكن نقلها خلال الخلية المختارة؟

لنحدد مسار تقويم الخلية المختارة (S2 D2) ثم الكميات الموجودة حالياً في كل خلية من خلايا المسار كالآتي:

$$\text{مسار الخلية (S2 D2) + (S2 D2) - (S2 D1) + (S1 D1) - (S1 D2)}$$

$$= 4000, 2500, 1000 \text{ صفراً،}$$

لاحظ أن المسار لا يبد وأن يتكون من عدد زوجي من الخلايا (في هذه الحالة تساوي 4) وأن نصف هذا العدد تسبقه إشارة موجبة بينما النصف الآخر تسبقه إشارة سالبة. ويطلق على الخلايا الموجبة في المسار «الأركان الموجبة» كما يطلق على الخلايا السالبة «الأركان السالبة». فالإشارة (+) تعني الحاجة إلى وضع عدد من السلع في الموقع أما الإشارة السالبة (-) فتعني إمكانية الأخذ ويحدد الحد الأقصى للوحدات التي يمكن نقلها خلال الخلية غير المستقلة والمعروف باستقلالها، بأقل الوحدات الموجودة في كل من الأركان السالبة (وهي في هذه الحالة تساوي 2500 وحدة الموجودة في الخلية (S2 D1). ويرتب على ذلك أن إعادة التوزيع يجب أن تكون كالآتي:

انقل 2500 وحدة من (S2 D1) إلى (S1 D1) ثم انقل 2500 وحدة من (S1 D2) إلى (S2 D2). وإذا ما ففنا ذلك يصبح التوزيع الجديد كالمتين في الجدول التالي:

جدول (30 - 4)

	D1	D2	D3	D4	S3
2500	3	2	7	6	
	3500	1500			Supply
S1	7	5	2	3	5000
		2500	2000	1500	
S2	2	5	4	5	6000
	2500				
Demands	6000	4000	2000	1500	13500

$$\text{مجموع التكاليف } 1500 (2) + 2500 (5) + 2000 (2) + 1500 (3) + 2500 (2) = 39500$$

$$= 39500 + 5000 + 4500 + 4000 + 12500 + 3000 + 10500 =$$

$$= 39500 - 42000 = 39500$$

فيها الكمية المطلوبة من قبل المستهلك. وذلك عن طريق البدء بالخلية S1 D3 وإعطائها الإشارة الموجبة ثم الانتقال إلى الخلية (S2 D3) وإعطائها الإشارة السالبة، ثم إلى الخلية (S2 D1) وإعطائها الإشارة الموجبة، ثم الانتقال إلى الخلية (S1 D1) وإعطائها الإشارة السالبة، ثم أخيراً الرجوع إلى الخلية السابقة (S1 D3). ويتم حساب التكلفة كالآتي:

$$S1 D3 = 7 - 2 + 7 - 3 = 9$$

$$S1 D4 = 6 - 3 + 7 - 3 = 7$$

$$S2 D2 = 5 - 7 + 3 - 2 = -1$$

(تكلفة النقل من الممكن أن تخفص بدينار واحد لكل وحدة واحدة)

$$S3 D2 = 5 - 2 + 3 - 2 = 4$$

$$S3 D3 = 4 - 2 + 7 - 2 = 7$$

$$S3 D4 = 5 - 2 + 7 - 3 = 7$$

إذا هذه القيم يمكن إدراجها في الجدول التالي:

جدول (29 - 4)

	D1	D2	D3	D4	S3
2500	3	2	7	6	
	1000	4000	2	7	Supply
S1	7	2	2	3	5000
	2500	2000	1500		
S2	2	5	4	5	6000
	2500	4	7	7	
Demands	6000	4000	2000	1500	13500

من المعروف، عندما نصل إلى الحل الأمثل، أن جميع القيم تكون موجبة أو تساوي صفراً. ولكن بالنظر إلى الجدول (29 - 4)، نلاحظ أن جميع القيم الناتجة لم تكن موجبة أو تساوي صفراً، بل هناك خلية واحدة في (S2 D2) (الخلية المظللة) قيمتها تساوي (1-)، ويعني ذلك بأن التكاليف يمكن تخفيضها بدينار واحد للوحدة الواحدة التي تقع داخل نطاق هذه الخلية.

3 - تعديل التوزيع بتأثير تقويم الخلايا غير المستقلة:

لا شك أننا كنا نهدف من تقويم الخلايا (غير المستقلة) إلى اختبار إمكانية تحسين برنامج التوزيع بما يؤدي إلى تحقيق تخفيض في التكاليف. فوإذا ما عرفنا أن شرط عدم التحلل يلزمنا باستخدام خلية واحدة غير مستقلة في الجولة الواحدة فإنه يصبح من

#### جدول (32- 4)

	D1	D2	D3	D4	Supply
S1	3	2	7	6	5000
	3500	1500	8	6	
S2	7	5	2	3	6000
	2500	2000	1500		
S3	2	5	4	5	2500
	2500	4	6	5	
Demands	6000	4000	2000	1500	13500

ونبتين من تقويم الخلايا غير المستغلة في الجدول أن هذا هو التوزيع الأمثل للكميات في مصادر العرض الثلاثة على مراكز الطلب الأربعة، وذلك لعدم وجود أي قيمة سالبة لأي خلية غير مستغلة في الجدول. ويعني ذلك أن استغلال أي من الخلايا غير المستعملة يؤدي إلى زيادة التكلفة. ويكون برنامج التوزيع الأمثل كما في الجدول (33- 4)

#### جدول (33- 4)

	تكلفة الوحدة	عدد الرحلات	Demands	Supply
النكفة الكلية				
10500	3	3500	D1	S1
3000	2	1500	D2	S1
12500	5	2500	D2	S2
4000	2	2000	D3	S2
4500	3	1500	D4	S2
5000	2	2500	D1	S3
39500		13500	الإجمالي	

#### II - طريقة التوزيع المعدلة (MODI) Modified Distributing Method :

هذه الطريقة لا تختلف عن طريقة حجر التنقل (التخطي) كثيراً، إلا أنها تؤدي إلى روتين أكثر كفاءة في تحديد أفضل الخلايا المانية الواجب استخدامها.

#### خطوات طريقة التوزيع المعدلة:

##### 1- إمداد جدول التوزيع لأجراء التوزيع المحكي الأول:

بعد التوصل إلى الحل وذلك عن طريق استخدام إحدى طرق التوزيع السابقة، يجب التأكد من أن عدد الحقول المشغولة في الجدول النهائي وذلك بواسطة الثابت  $m$  حيث  $m + n - 1$  تساوي عدد الرحلات

(2500) تساوي عدد الوحدات المشغولة خلال الخلية (S2 D2) مضروباً في الوفرة الناتج عن نقل وحدة واحدة خلال (S2 D2)، أي  $2500 \times 1 = 2500$  = تخفيض في التكاليف.

#### 4 - كمر الخطوات الثانية والثالثة إلى أن تصل إلى برنامج التوزيع الأمثل :

تكرر كل من الخطوات السابقتين حتى نصل إلى نقطة يصبح فيها تقويم كل الخلايا غير المستغلة أرقاماً موجبة، بمعنى عدم إمكانية تحقيق أي وفورات في التكاليف بإجراء أي تغيير في برنامج النقل. فوجود رقم سالب يمثل تقويم أحد الخلايا غير المستغلة بمعنى أن استغلال هذه الخلية سوف يؤدي إلى تحقيق خفض في التكاليف يساوي هذا الرقم مضروباً في عدد الوحدات التي يمكن أن يتم نقلها خلالها. أما وجود رقم موجب في أية خلية غير مستغلة فيعني أن استغلال هذه الخلية سيؤدي إلى زيادة التكاليف بمقدار هذا الرقم مضروباً في عدد الوحدات التي يتم نقلها خلالها.

ولنقم الآن بملاحظة الخلايا غير المستغلة في الجدول التالي:

#### جدول (31- 4)

	D1	D2	D3	D4	S3
S1	3	1500	7	6	5000
	3500	5	2	3	
S2	7	2500	2000	1500	6000
		+	-		
S3	2	5	4	5	2500
	2500				
Demands	6000	4000	2000	1500	13500

$$S1 D3 = 7 - 2 + 5 - 2 = 8$$

$$S1 D4 = 6 - 3 + 5 - 2 = 6$$

$$S2 D1 = 7 - 3 + 2 - 5 = 1$$

$$S3 D2 = 5 - 2 + 3 - 2 = 4$$

$$S3 D3 = 4 - 2 + 3 - 2 + 5 - 2 = 6$$

$$S3 D4 = 5 - 2 + 3 - 2 + 5 - 3 = 6$$

## 2- تحديد قيمة كل من $C_i$ , $C_j$ :

تكون العلاقات المحددة لقيمة كل من  $U_i$ ,  $V_j$  كالآتي:

$$U_i + V_j = C_{ij}$$

$$U_1 + V_1 = 3$$

$$U_1 + V_2 = 2$$

$$U_2 + V_1 = 7$$

$$U_2 + V_3 = 2$$

$$U_2 + V_4 = 3$$

$$U_3 + V_1 = 2$$

ملاحظة: المعادلات السابقة تمثل فقط بتكلفة الوحدة الواحدة ( $C_{ij}$ ) للخلية أو

المربيع المملوء بالكميات. وكذلك في هذه الحالة وجود ست معادلات في سبعة مجاهيل هي ( $U_1, U_2, U_3, V_1, V_2, V_3, V_4$ ). ويترتب على ذلك عدم إمكانية تحديد قيمة أي من المجاهيل ما لم تحدد قيمة إحداها خارج النموذج. ونظراً لوجود أكثر من متغير واحد، من خلال هذا نستطيع أن نفرض واحداً من المتغيرات بقيمة صفر مثلاً ( $U_1 = 0$ )، (عادة يحدد الصف أو العمود الذي يوجد به أكبر عدد من الكميات (مثلاً الصف  $S_1$  أو العمود  $D_1$ ) وبذلك نستطيع أن نتحصل على قيمة المتغيرات الأخرى وهي كالآتي:

$$0 + V_1 = 3$$

$$0 + V_2 = 2$$

$$U_2 + V_1 = 7$$

$$U_2 + V_3 = 2$$

$$U_2 + V_4 = 3$$

$$U_3 + V_1 = 2$$

$$U_1 = 0$$

$$U_2 = 4$$

$$U_3 = -2$$

$$V_1 = 3$$

يحل المعادلات السابقة لإيجاد قيمة ( $U, V$ ) وهي كالآتي:

(الطلبات). وتؤدي طرق حل مشكلة النقل المختلفة إلى هذه النتيجة إلا في حالة واحدة وهي الحالة التي تكون فيها المواد المتاحة من السلع في أحد المصادر مساوية تماماً لاحتياجات إحدى الوجهات، وعند نقل هذه السلع من المصدر إلى هذا المركز فإنه سوف يؤدي إلى تفاد هذه السلعة. وفي هذه الحالة فإن  $(m + n - 1)$  سوف لا تحقق إلا من التأكد من أن الحل الذي تم التوصل إليه هو الأمثل عند تحقق شرط المساواة. نلاحظ من جدول الحل النهائي للمثال السابق أن عدد الحقول (المربعات) المشغولة هو (6)، وبهذا فإن هذا الرقم يساوي  $(m + n - 1)$  (3 + 4 - 1) وبهذا يمكن التأكد من أن الحل هذا هو الأفضل.

تتميز هذه الطريقة بأنه عندما يتم تحديد التوزيع المبدئي، يتم احتساب مقدار معين لكل صف ولكل عمود في مصفوفة التوزيع ليتم استخدامها في تقويم المربعات أو الخلايا المائية. فمثلاً إذا رمزنا للصف بالرمز ( $U_i$ )، حيث ( $U_1$ ) تعني الصف الأول، ( $U_2$ ) تعني الصف الثاني... وهكذا. وإذا رمزنا للعمود بالرمز ( $V_j$ ) حيث ( $V_1$ ) تعني العمود الأول، (انظر إلى الجدول التالي)، فإن كل خلية لابد وأن تقع في صف معين وعمود معين. وبذلك فإذا كانت:

$$U_i = \text{القيمة المغطاة للصف } i$$

$$V_j = \text{القيمة المغطاة للعمود } j$$

فإن  $(C_{ij}) = \text{تكلفة (أو ربح) نقل الوحدة خلال الخلية التي تقع في الصف } i \text{ والعمود } j$ ، فإننا نقوم بتحديد قيمة كل من  $C_i$ ,  $C_j$  من المعادلة التالية:

$$C_{ij} \text{ التكلفة (أو الربح)} = U_i + V_j$$

جدول (34 - 4)

	D1	D2	D3	D4	Supply
S1	3 1000	2 4000	7	6 5000	U1
S2	7 2500	5	2 2000	3 1500	U2
S3	2 2500	5	4	5 2500	U3
Demands	6000	4000	2000	1500	13500
	V1	V2	V3	V4	

$$E_{ij} = C_{ij} - U_2 - V_2 = 5 - 4 - 2 = -1$$

$$E_{ij} = C_{ij} - U_3 - V_2 = 5 - (-1) - 2 = 4$$

$$E_{ij} = C_{ij} - U_3 - V_3 = 4 - (-1) - (-2) = 7$$

$$E_{ij} = C_{ij} - U_3 - V_4 = 5 - (-1) - (-1) = 7$$

يمكن وضع هذه القيم في جدول كما هو في الجدول (36-4).

جدول (36-4)

	D1	D2	D3	D4	Supply
S1	3 1000	2 4000	7 9	6 7	5000 U1 = 0
S2	7 2500	5 1	5 2000	2 1500	6000 U2 = 3
S3	2 2500	4 4	5 7	4 7	5 2500 U3 = 1

Demands 6000 4000 2000 1500 13500

$$V_1 = 3 \quad V_2 = 2 \quad V_3 = -1 \quad V_4 = -0$$

الآن يجب ملاحظة القيم التي تحصلنا عليها من خلال القانون السابق؛ فإذا كانت

كل القيم موجبة أو صفرية فإن هذا يعني أن الحل هو الأمثل، أما إذا احتوى على قيم سالبة فإن هذا يعني أن الحل ليس هو الأمثل. ففي هذا المثال نجد أننا لم نصل إلى الحل الأمثل لأنه يوجد أحد القيم سالبة (-1) وتقع في الخلية أو المربع (S2, D2). وهذه الخلية أو المربع الذي توجد به القيمة السالبة، تعني بأنه سوف نخفض التكلفة بمقدار دينار للوحدة الواحدة التي يتم نقلها من هذه الخلية. وبمقارنة هذا التقويم بما سبق أن توصلنا إليه في نفس المرحلة باتباع طريقة الحجر المتقل نجد أنه لا توجد أي اختلافات على الإطلاق.

3- تعديل التوزيع طبقاً لتقويم الخلايا المائية:

في الجدول السابق نجد أن القيم التي تحصلنا عليها هي نفسها مساوية للقيم التي وجدناها عندما اتبعنا طريقة الحجر المتقل (التخطي). نجد أن لدينا خلية واحدة تؤدي إلى نفس الوفر في التكلفة وهي (S2 D2) ومقداره دينار واحد لكل وحدة واحدة يتم نقلها من هذه الخلية. ويتبع نفس الإجراءات التي استخدمناها في طريقة التخطي وذلك لإعادة توزيع الكميات. ويكون التوزيع الجديد كما في الجدول (37-4).

$$V_2 = 2$$

$$V_3 = -2$$

$$V_4 = -1$$

وهذه القيم تظهر في جدول التوزيع السابق بقيم كل من (U<sub>i</sub>, V<sub>j</sub>) كما في الجدول (35-4).

جدول (35-4)

	D1	D2	D3	D4	Supply
S1	3 1000	2 4000	7 7	6 6	5000 U1 = 0
S2	7 2500	5 5	2 2000	3 1500	6000 U2 = 4
S3	2 2500	5 5	4 4	5 5	2500 U3 = 1

Demands 6000 4000 2000 1500 13500

$$V_1 = 3 \quad V_2 = 2 \quad V_3 = -2 \quad V_4 = -1$$

والواقع أنه ليس من الضروري كتابة المعادلات السابقة لاحتساب قيمة كل من (U<sub>i</sub>, V<sub>j</sub>) حيث يمكن تحديدها ذهنياً بالمران.

3- تقويم الخلايا أو المربعات غير المملوءة بالكميات عن طريق استخدام المعادلة الآتية:

$$E_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$$

حيث (E<sub>ij</sub>) = القيمة المغطاة للخلية أو المربع غير المملوء بالكميات، وتعني التغير في التكاليف.

لاحظ أننا نستخدم قيم (U<sub>i</sub>, V<sub>j</sub>) (التي يتم إيجادها عن طريق تكلفة الخلايا أو المربعات المملوءة التي توجد بها كميات) لإيجاد الخلايا أو المربعات غير المملوءة بالكميات وليس العكس. وباتباع هذه المعادلة تكون الخلايا أو المربعات غير المملوءة بالكميات كالآتي:

$$E_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$$

$$E_{ij} = C_{ij} - U_1 - V_3 = 7 - 0 - (-2) = 9$$

$$E_{ij} = C_{ij} - U_1 - V_4 = 6 - 0 - (-1) = 7$$

#### مشكلة التحمل Degeneracy Problem :

مشكلة التحمل تحدث عندما تقوم بإجراءات أو خطوات الحل لمشكلة معينة، فينتج من أحد الجداول أن التوزيع الجديد ترتب عليه انخفاض في عدد الخلايا المستقلة (مثلاً من 6 إلى 5 خلايا)، مما يصبح معه من المستحيل إيجاد قيمة كل من بعض الخلايا. كما يترتب عليه أيضاً عدم إمكانية توفير كل الخلايا غير المستقلة طبعاً لهاتين الطريقتين، وتسمى المشكلة بهذه الحالة بالمشكلة المتحالة، وذلك لأن شرط عدم التحمل أصبح غير مستوف. المثال التالي (مثال 5) يبين ذلك.

جدول (38- 4)

	D1	D2	D3	D4	Supply
S1	4	7	6	5	300
	300	-7	-4	-4	
S2	3	7	2	6	250
	50	200	-7	-3	
S3	3	3	5	4	600
	4	150	200	250	
Demands	350	350	200	250	1150

لاحظ الخلايا المملوءة أو المستقلة بالكميات في هذا الجدول، نجد عددها يساوي 6 خلايا، وهذا يتفق مع الشرط  $(m + n - 1)$ . ويمكن توضيح ذلك كالآتي:

$$\text{عدد الخلايا المستقلة} = [\text{عدد الصفوف} + \text{عدد الأعمدة}] - 1 = \text{عدد الخلايا المستقلة} = 6 = [(4 + 3) - 1]$$

ويسمى هذا الشرط بشرط عدم تحمل المشكلة أو عدم سيرها في حلقة مفرقة Non Degeneracy Condition. وهذا الجدول لا يمثل التوزيع الأمثل وذلك لوجود العديد من القيم السالبة. والآن نبدأ في اختيار أكبر قيمة بالسالب وذلك لنفرض تعديل التوزيع. فنجد في هذا الجدول خليتين متساويتين في القيمة (7-) وهما الخلية (S1, D3), (S2, D2). فلو اخترنا الخلية (S2, D3) لأنه في هذه الخلية يكون فيها أكبر كمية يمكن نقلها (200 وحدة). ويكون التوزيع الجديد كما هو مبين في الجدول (39- 4).

جدول (37- 4)

	D1	D2	D3	D4	Supply
S1	3	2	7	6	5000 U1 = 0
	3500	1500	8	6	
S2	7	5	2	3	6000 U2 = 3
	1	2500	2000	1500	
S3	2	5	4	5	2500 U3 = -1
	2500	4	6	6	
Demands	6000	4000	2000	1500	13500

$$V1 = 3 \quad V2 = 2 \quad V3 = -1 \quad V4 = -$$

0

نلاحظ أن الجدول (37- 4) يمثل التوزيع الأمثل، وهي نفس النتيجة التي توصلنا إليها حسب طريقة النخطي.

#### ملخص الخطوات المبينة

- 1- ضع بيانات المشكلة في صورة مصفوفة توزيع (جدول).
- 2- قم بإجراء التوزيع المبني الأول عن طريق اتباع إحدى طرق التوزيع (طريقة الأقل تكلفة أو طريقة الزاوية الشمالية الغربية... وغيرها).
- 3- تأكد من أن المشكلة بعد إجراء هذا التوزيع غير متحللة وذلك عن طريق التأكد من صحة المعادلة: عدد الخلايا المستقلة = (عدد الصفوف + عدد الأعمدة) - 1.
- 4- قم بإيجاد قيمة كل الخلايا المائنة (الخلايا غير المستقلة) وذلك عن طريق تحديد مسار تقويم كل خلية على حدة واحتساب الوفورات في التكاليف (الأرقام السالبة) والزيادات في التكاليف (الأرقام الموجبة) التي تترتب على نقل وحدة واحدة من خلال هذه الخلية.
- 5- اختر من بين الخلايا المائنة تلك التي تؤدي إلى تحقيق أقصى الوفورات في التكاليف (الخلية ذات أكبر قيمة مطلقة بإشارة سالبة) وفي حالة تساوي خليتين أو أكثر اختر من بينها تلك التي يمكن نقل أكبر عدد من الوحدات خلالها - كما يبين من الخطوة التالية. إذا كانت قيم الخلايا المائنة موجبة فقد توصلت إلى التوزيع الأمثل.
- 6- احسب الحد الأقصى لعدد الوحدات التي يمكن نقلها من خلال الخلية المختارة عن طريق تحديد الأركان المرحبة والأركان السالبة لمسار تقويم الخلية - اختر أقل الوحدات من الأركان السالبة - ويحمل هذا العدد الحد الأقصى للوحدات التي يمكن نقلها من خلال الخلية المختارة.
- 7- قم بإعادة التوزيع على أساس الخلية المختارة.
- 8- كرر الخطوات من 3 إلى 7 إلى أن تصل إلى برنامج التوزيع الأمثل.

جدول (4- 40)

	D1	D2	D3	D4	Supply
S1	4 300	1 -3	6 3	5 0	300
S2	3 50	7 4	2 200	6 2	250
S3	3 n	3 350	5 3	4 250	600
Demands	350	350	200	250	1150

لاحظ القيم في الخلايا غير المستغلة، فنجد الخلية (S1 D2) قيمتها سالبة (3-)، وهذا يعني أننا لم نصل إلى التوزيع الأمثل، لأن هذه الخلية سوف تخفض الكاليف بقيمة ثلاثة دنانير للوحدة الواحدة للكميات الواقعة في نطاق هذه الخلية. ويتم تكرار الخطوات السابقة حتى نصل إلى التوزيع الأمثل. ويكون تعديل التوزيع الجديد في الجدول (4- 41).

جدول (4- 41)

	D1	D2	D3	D4	Supply
S1	4 3	1 300	6 6	5 3	300
S2	3 50	7 4	2 200	6 2	250
S3	3 300	3 50	5 3	4 250	600
Demands	350	350	200	250	1150

في الجدول (4- 41) يجب علينا أن نتأكد من معالجة مشكلة التحلل بعد اختيارها. وبإجراء هذا الاختيار على الجدول (4- 41) السابق، نجد أن عدد الخلايا المستغلة يساوي 6 وأن (عدد الصفوف + عدد الأعمدة - 1) يساوي 6. وبذلك فالمشكلة أصبحت غير متحللة، كما أننا تخلصنا من (n) في الخلية (S3 D1) (حيث  $300 + n$  قريبة من الصفر = 300). والآن يقتضي الأمر حساب قيم كل الخلايا غير المستغلة وحساب الكلفة المتناقصة أو المتزايدة للوحدة الواحدة، وقد قمنا بذلك كما هو مبين في الجدول (4- 42).

كل القيم الموجودة في الخلية غير المستغلة موجبة وهذا يعني أن هذا هو التوزيع الأمثل. ويكون التوزيع الأمثل كما في الجدول (4- 42).

جدول (4- 39)

	D1	D2	D3	D4	Supply
S1	4 300	1 	6 	5 	300
S2	3 50	7 	2 200	6 	250
S3	3 	3 350	5 	4 250	600
Demands	350	350	200	250	1150

يتضح من الجدول (4- 39) أن التوزيع الجديد ترتب عليه انخفاض عدد الخلايا المستغلة إلى خمس خلايا، مما يصبح معه من المستحيل إيجاد قيمة لبعض الخلايا، وترتب عليه أيضاً عدم إمكانية تقويم كل من الخلايا غير المستغلة طبقاً لهاتين الطريقتين: مثلاً الخلية (S1 D1)، (S1 D4)، (S2 D2)، (S2 D4)، (S3 D3)، (S3 D1) وتسمى المشكلة بهذه الحالة بالمشكلة المتحللة، وذلك لأن شرط عدم التحلل أصبح غير مستوف.

إختيار مشكلة التحلل ومعالجة الوضع إذا اقتضى الأمر:

يمكن علاج هذه المشكلة المتحللة وذلك عن طريق إضافة خلية أخرى للخلايا المستغلة حتى نتمكن من تقويم باقي الخلايا، سواء كان ذلك التقويم يتم عن طريق اتباع طريقة التوزيع المبدلة أو طريقة التخفي. ولنفرض أننا أضفنا عدداً صغيراً جداً من الوحدات (مثلاً قيمة قريبة من الصفر) لأحدى الخلايا غير المستغلة بحيث لا يؤثر ذلك على شرط التوازن. بمعنى أن عدد الوحدات المضافة ضئيل جداً بحيث يترتب على إهماله عدم التأثير في إجمالي الطلب أو العرض. ولنرمز لهذا الحجم الضئيل بالرمز (n) ونفرضه في إحدى الخلايا غير المستغلة لتحويلها إلى خلية مستغلة (لاحظ أننا وضعنا هذا الرمز في الخلية (S3 D1) (المقابلة)) يترتب على ذلك أن عدد الخلايا المستغلة أصبح مساوياً لعدد الصفوف زائداً عدد الأعمدة ناقصاً واحداً. ومن ثم أصبح شرط عدم التحلل مستوفياً. والآن يمكن احتساب قيمة التكلفة المتناقصة أو المتزايدة لكل خلية غير مستغلة عن طريق استخدام الكميات الموجودة في الخلايا المستغلة بما فيها الخلية (n). كما سبق في الخطوات السابقة.



الهدف في بعض الأحيان يكون هو البحث عن أعلى ربح ممكن. في هذه الحالة نتبع كل الإجراءات التي اتبعناها في القيمة الصغرى على حل القيمة العظمى، ما عدا الاختلاف يكون في الأمور التالية:

1- الاختلاف يكون في كيفية الاختيار للقيمة من الخلايا التي لم تستغل: في حالة القيمة الصغرى كانت القيمة التي يجب اختيارها تمثل أعلى قيمة بالسالب. ولكن في القيمة العظمى يجب اختيار القيمة التي تمثل أعلى قيمة بالمرجوب، والتي تعني أن هذه القيمة سوف ترفع الأرباح بوحدة واحدة حسب هذه القيمة في موقع الخلية.

2- الاختلاف في كيفية تحديد الجدول النهائي الذي يمثل الحل الأمثل: في حالة القيمة الصغرى يحدد الجدول النهائي بأنه هو الحل الأمثل عن طريق ملاحظة القيم الموجودة في الخلايا غير المستغلة؛ فيجب أن تكون هذه القيم كلها موجبة أو تساوي صفراً ( $0 \leq C_{ij} - U_i - V_j$ ). بينما يكون جدول الحل الأمثل للقيمة العظمى عندما تكون هذه القيم سالبة أو تساوي الصفر  $0 \leq C_{ij} - U_i - V_j$  ويمكن توضيح ذلك عن طريق المثال (6):

جدول (43 - 4)

متاخذ	الربح المباشر للوحدة	المخازن
I	II	III
التوزيع		المركبة
A	6 200 4 150 7 350	
B	4 3 6 400 2 400	
C	3 3 5 -1 3 350	
D	5 450 3 -1 5 650	
	750 450 550	

$$\text{مجموع الأرباح (6) } 150 + (7) 400 + (2) 400 + (3) 350 + (5) 200 + (3) 450 = 200$$

$$6450 = 1350 + 1000 + 1050 + 800 + 1050 + 1200 =$$

عند ملاحظة الخلايا غير المستغلة أو غير المملوءة بالكميات، نجد الخلية (IIB) تمثل أعلى قيمة بالمرجوب (7). وهذا يعني أن الأرباح سوف تزيد بقيمة (7) دنانير للوحدة

جدول (42 - 4)

التكلفة الكلية	تكلفة الوحدة	عدد الوحدات	Demands	Supply
300	1	300	D2	S1
150	3	50	D1	S2
400	2	200	D3	S2
900	3	300	D1	S3
150	3	50	D2	S3
1000	4	250	D4	S3
2900		1150		الإجمالي

الطريقتان ومشكلة التحلل:

مما سبق نلاحظ أن الطريقتين - طريقة الخطي وطريقة التوزيع المعدلة - تؤديان إلى نفس النتيجة. غير أن طريقة التوزيع المعدلة تعتبر أكثر كفاءة في تقويم الخلايا غير المستغلة (الخلايا المائتة)، وكلاهما يؤدي إلى نفس الخفض في التكلفة. ولكن تحلل المشكلة كما سبق ورأينا لا يؤدي إلى مشاكل عويصة ويمكن التغلب عليه بسهولة. فإذا أظهر في تقويم الخلايا غير المستغلة أن أكثر من واحدة منها تؤدي إلى نفس الوفرة في التكلفة وأن إحداها تؤدي إلى تحلل المشكلة ولكنها في نفس الوقت تسمح بنقل عدد أكبر من الوحدات عن الخلايا الأخرى التي يؤدي استخدامها إلى عدم تحلل المشكلة، فمن الأفضل اختيار الأولى رغم ما ينتج عن ذلك من تحلل في المشكلة يسهل علاجه (وبشرط وضع  $m$  قيمة قريبة من الصفر) في أقل الخلايا غير المستغلة بالكميات بحيث تكون هذه الخلية لم يستغل استغلالها أبداً في الجداول السابقة، حيث إن ذلك سيؤدي في معظم الأحيان إلى التوصل إلى الحل الأمثل في عدد أقل من الخطوات.

من الملاحظ أيضاً أن مشكلة التحلل قد تنتج عنها الحاجة إلى شغل أكثر من خلية واحدة بكميات ضئيلة ( $m$  قيمة قريبة من الصفر) حتى يمكن التغلب على المشكلة. والواقع أنه ليس هناك أي ضرر أو أي تعقيد يمكن أن ينتج عن إضافة أي عدد من الخلايا ( $m$ ) بما يكفي لإعادة شرط عدم التحلل إلى وضع الاستيفاء. ولكنه في هذه الحالة يجب اختيار الخلايا المضاعفة بدقة حتى لا تفسر المشكلة في حلقة مفرغة، بمعنى أن كل خطوة تالية تؤدي إلى إعادة الأمر إلى ما كان عليه في خطوات سابقة. فإذا حدث ذلك فيجب نقل ( $m$ ) إلى خلية أخرى من الخلايا غير المستغلة حتى تتفادى الدوران في حلقة مفرغة (نسمى المشكلة من هذا النوع Problem Cycling).

ثانياً - مشكلة البحث عن أعلى ربح ممكن (القيمة العظمى):

كان الهدف في السابق هو البحث عن التوزيع الذي يمثل أقل تكلفة ممكنة، ولكن

#### جدول (4-45)

منافذ	الربح المباشر للوحدة			المخازن
التوزيع	I	II	III	المركزية
A	6 -1	4 -5	7 350	350
B	4 0	6 400	2 -2	400
C	3 300	5 50	3 0	350
D	5 450	3 0	5 200	650

$$= 350 + \text{مجموع الأرباح } (7) 400 + (6) 300 + (3) 50 + (5) 450 + (5) 200 = 9250$$

$$9250 = 1000 + 2250 + 250 + 900 + 2400 + 2450 =$$

نلاحظ في الجدول (4-45) أن كل القيم الموجودة في الخلايا غير المستقلة أقل من الصفر وتساوي الصفر. إذاً هذا هو الحل الأمثل بالنسبة للقيمة المثلى.

#### أسئلة وتمارين Questions and Exercises

##### الأسئلة Questions

- س1- ما هو المقصود بمشكلة النقل؟ وما هي الخطوات الأساسية التي يجب أن نأخذها عندما نقوم بحل مشكلة تتعلق بالنقل؟
- س2- ما هي الطرق التي يمكن استخدامها لإيجاد التوزيع الأمثل؟ وما هي الطرق الأخرى للتأكد من أن الحل هو الحل الأمثل أم لا؟ مع إعطاء أمثلة عن ذلك.
- س3- وضح كل ما أمكن ذلك وباستخدام الأمثلة البسيطة كلاً من:
  - أ- نموذج النقل غير المتوازن.
  - ب- مشكلة التحلل.

س4- ما هو الفرق بين مشكلة البحث عن أقل تكلفة ومشكلة البحث عن أعلى ربح ممكن؟

الوحدة، لأية كمية تكون بداخل هذه الخلية. ويمكن الآن تعديل توزيع الوحدات داخل هذا الجدول وذلك حسبما نتبع في إجراءات القيمة الصغرى، وهي كما في الجدول (4-44).

#### جدول (4-44)

منافذ	الربح المباشر للوحدة			المخازن
التوزيع	I	II	III	المركزية
A	6 -7	4 -7	7 350	350
B	4 -4	6 200	2 200	400
C	3 350	4 4	5 6	350
D	5 400	3 250	6 5	650

$$= 350 + \text{مجموع الأرباح } (7) 350 + (6) 200 + (2) 200 + (3) 350 + (5) 400 + (3) 250 = 8450$$

$$8450 = 750 + 2000 + 1050 + 400 + 1800 + 2450 =$$

نلاحظ في الجدول (4-44) وجود خليتين (C III) (D III) تملآن أعلى قيمة بالمرجوب. فبم اختيار الخلية التي من المحتمل أن ينقل إليها أكبر كمية ممكنة من الوحدات. ولكن نجد أن الخليتين متساويتان في القيمة التي تنقل إليهما وهي (200). ولكن الخليتين تختلفان في ربح الوحدة الواحدة، فنجد أن الخلية (C III) يكون ربح الوحدة يساوي (3) بينما الخلية (D III) يكون فيها ربح الوحدة أعلى من الخلية السابقة وهي (5) إذاً يمكن اختيار الخلية (D III)، لأنها سوف تضيف لنا أرباحاً أعلى طالما أن الكميتين اللتين تفلان إلى هاتين الخليتين متساويتان، ويكون التوزيع الجديد للكميات كما في الجدول (4-45).

بهذه الكتب ولكن تحت الشروط التالية والأسعار التالية :

	B1	B2	B3	B4
I	40	40	45	35
II	20	25	30	25
III	50	40	30	35
	18	26	20	

المطلوب : إيجاد الخطة الشرائية التي من شأنها جعل تكاليف الشراء للجامعة أقل ما يمكن - هل الحل الأمثل الذي توصلت إليه هو حل وحيد أم أن هناك أكثر من حل أمثل ؟ وإذا كان كذلك فأوجد أحد تلك الحلول مع حساب التكاليف في كل الحالات .

س4- شركة تمتلك ثلاثة مصانع (X1, X2, X3) لإنتاج التلاجات تقع في مناطق جغرافية مختلفة . وتقوم الشركة بشحن الإنتاج من المصانع الثلاثة إلى ثلاثة مخازن (A, B, C) وذلك بغرض التخزين (أي المخازن) تقع في مناطق مختلفة وتبلغ تكلفة النقل من المصنع الأول إلى المخازن الثلاثة (8، 8، 4) على التوالي ، وتكلفة نقل التلاجة من المصنع الثاني إلى المخازن (24، 16، 8) على التوالي ، ومن المصنع الثالث إلى المخازن (5، 16، 24) على التوالي . وتقدر الطاقة الإنتاجية للمصانع (77، 82، 56) بينما القدرة التخزينية للمخازن الثلاثة هي على التوالي (41، 102، 72) تلاجة في الشهر .

المطلوب : تحديد الخطة التي يجب اتباعها في نقل التلاجات من المصانع إلى المخازن الثلاثة لجعل التكاليف للنقل أقل ما يمكن .

س5- تقوم ثلاثة معامل بإنتاج الحبيبات البلاستيكية ، ويتم نقل هذه المواد إلى أربعة معامل حيث يتم تسليكها في منتجات مختلفة . أوجد أفضل طريقة لنقل وتوزيع الحبيبات البلاستيكية بحيث تكون تكلفة ذلك أقل ما يمكن استناداً إلى المعلومات التالية :

1 - تكلفة النقل :

	1	2	3	4
A	3	5	4	4
B	4	4	5	5
C	4	3	4	3

2 - الطاقة الإنتاجية للمعامل الثلاثة (A, B, C) هي (190، 150، 160) وتحتاج معامل التشكيل التالية من الحبيبات سنوياً إلى :

## Exercices :

س1 - تحتاج الجماهيرية الليبية لأربعة أنواع من الحبوب هي (الذرة، القمح، الدخن، الشعير) لأجل استزراعها في الموسم الزراعي القادم . توجد ثلاث دول مستعدة لسد هذه الحاجة وهي : روسيا، كندا، إسبانيا . وذلك بالكميات التالية : (50، 60، 25) ألف طن للدول الثلاث على التوالي . أما كميات الطلب عن هذه الأنواع الثلاثة من الحبوب في الجماهيرية بألاف الأطنان وسعر الطن الواحد من الحبوب بالدولار حسبما هو معروض من تلك الدول مينة بالجدول التالي :

أنواع الحبوب	حجم الطلب ألف/طن	سعر الطن الواحد من الحبوب بالدولار
	كندا	إسبانيا
الذرة	60	3
القمح	40	5
الدخن	20	3
الشعير	15	6

المطلوب : ضع هذه المشكلة في صورة مشكلة نقل . ثم أوجد الخطة المثالية لتوريد الأصناف الثلاثة من الحبوب والتي تجعل مجموع تكاليف الشراء أقل ما يمكن .

س2- شركة النجاح يوجد لديها ثلاثة مصانع (أ، ب، ج) تنتج سلعة معينة ولكن الدراجات . وأن الطاقة الإنتاجية لهذه المصانع الثلاثة وعلى التوالي هي (100، 200، 400) وهذا الإنتاج يتم نقله إلى ثلاثة مخازن (س، ص، ع) وطاقها التخزينية على التوالي هي (250، 150، 200) . ويتم نقل هذه الدراجات من المصنع (أ) إلى المخازن (س، ص، ع) عند تكلفة (1، 3، 1) دينار للدراجة الواحدة على التوالي . كما يتم نقل الدراجات من المصنع (ب) إلى المخازن الثلاثة عند تكلفة قدرها (1، 3، 2) دينار للدراجة الواحدة على التوالي . كذلك يتم نقل الدراجات من المصنع (ج) إلى المخازن الثلاثة عند تكلفة قدرها (3، 1، 2) دينار للدراجة الواحدة على التوالي .

المطلوب : وضع هذه المشكلة في صورة مشكلة نقل ، ثم أوجد الحل الذي يوضح كيفية نقل هذه الدراجات من المصانع الثلاثة إلى المخازن الثلاثة وذلك عند أدنى تكلفة . هل الحل الأمثل الذي توصلت إليه هو حل وحيد أم أن هناك أكثر من حل أمثل ؟ وإذا كان الأمر كذلك أوجد أحد تلك الحلول البديلة مع حساب التكاليف في كل حالة من تلك الحالات .

س3- تحتاج جامعة الجبل الغربي لأربعة كتب (B1, B2, B3, B4) في تخصصات أربعة مختلفة وذلك خلال الفصل الدراسي القادم وبالأعداد التالية : (B1 = 19, B2 = 18) (B3 = 12, B4 = 15) . وقد قدمت ثلاثة من دور النشر (I, II, III) لتوريد الجامعة

المطلوب: 1- قم بإجراء التوزيع المبدئي حسب قاعدة الزاوية الشعاعية الغربية، وحدد تكلفة النقل أو أرباح التوزيع المثالية مرة باستخدام طريقة الحجر المنقل ومرة أخرى باستخدام طريقة التوزيع المعدلة.

3- قم بصياغة نموذج البرمجة الخطية الملأهم لكل مشكلة منها.

7- إذا علمت أن الطلب في المراكز التسويقية التالية والموضحة في مصفوفة النقل أدناه أكثر من عرض المخازن؛ أوجد أفضل برنامج للنقل وفق طريقة الركن الشمالي أو لا ثم طريقة الأقل تكلفة ثانياً ومن ثم وفق طريقة فوجل.

مناطق التوزيع العرض

	D1	D2	D3	
S1	6	8	11	20
S2	12	6	8	40
S3	9	5	4	25
S4	3	0	1	15

الطلب 70 60 50

8- حل مشكلة النقل الآتية بطريقة فوجل ثم اختبر الحل الأمثل وفقاً لطريقة حجر النقل (التخطي).

مناطق التوزيع

	D1	D2	D3	Ai
S1	14	13	11	1200
S2	13	12	13	1000
	1000	700	500	

المعامل	1	2	3	4
الحيات ألف طن	70	100	150	180

6- إذا توفرت لديك المعلومات الموجودة في الجدول التالية :

الجدول الأول

المصانع احتياجات المراكز

تكلفة النقل للوحدة

الأول	الثاني	الثالث	500
2	4	7	
5	2	8	300
3	6	4	700

400 300 800 طاقة المصانع

الجدول الثاني

المخازن المركزية احتياجات المصانع

الربح المباشر للوحدة

الأول	الثاني	الثالث	350
6	4	7	
4	6	2	400
3	5	3	350
5	3	5	650

750 450 600 طاقة المخازن

الجدول الثالث

منافذ التوزيع طاقة المصانع

تكلفة النقل للوحدة

الأول	الثاني	الثالث	600
2	5	6	
3	4	5	400
5	3	7	350
4	2	1	450

400 300 800 احتياجات المنافذ

### 3- نماذج شبكة أعمال الأنشطة Activity Network Models :

وهذه النماذج تهدف إلى تحديد الأنشطة المتتابعة والمتوازنة، وتحديد الوقت لكل نشاط والتعرف على المسار (المسارات) الحرج.

#### مزايا تطبيق تحليل الشبكات:

- 1- تلزم إدارة المشروع بوضع خطة شاملة قبل الشروع في العمل.
- 2- تحليل الشبكات يساعد إدارة المشروع في عمليات التنسيق والمراجعة والمتابعة بين أجزاء المشروع.
- 3- تسلط الضوء على الأنشطة الحساسة والهامة مقدماً، كما تحدد عدد المسؤوليات تجاه هذه الأنشطة الحرجة.
- 4- تساعد المديرين والمسؤولين في تحسين طريقة تفكيرهم، وتجعلهم أكثر إحساساً بالمشاكل التخطيطية وأهميتها في المشروع.
- 5- تجعل إدارة المشروع تركز وتضع الإهتمام على الأنشطة ذات المثل أو التأثير أو ذات التكلفة المرتفعة أو النقص في الإمكانيات أكثر من جعل الإدارة تركز على الأنشطة العادية التي تقدم بسرعة وبشكل عادي.
- 6- تسهل توفير المعلومات التخطيطية حتى مع تغيير الإدارة العليا في المشروع، كما توفر المعلومات اللازمة لإعطاء الأوامر ووضع الإجراءات ونظم العمل.
- 7- تحدد وتثير للبداهة المثالية للمشروع والنهاية المثالية له ولكل نشاط أو وظيفة يتكون منها المشروع (أفضل وقت للبدء والانهاء وللتشغيل).
- 8- تساعد على تحسين وتعديل الخطة بما يوافق أي ظرف أو ظروف جديدة.
- 9- تقترح الطرق البديلة لإنجاز الروايف والأنشطة في المشروع.
- 10- تسمح بإعداد تقارير عن تقدم العمل وارسال التعليمات بدون ضياع كامل لتأمين سير العمل.
- 11- تسمح بالتخطيط المسبق للخطة العامة للمشروع لتلك الأنشطة والوظائف ذات الطابع الواحد والواجب تخطيطها كوحدة متكاملة أو جزء من المشروع Sub-project، مما يساعد في الإسراع في عملية التخطيط الشامل.
- 12- تعتبر من أهم الطرق لتدريب العاملين على أساليب إدارة العمليات.
- 13- يحقق تطبيق تحليل الشبكات كاسلوب لتخطيط وجدولة المشروعات، توفير معلومات هامة وعديدة وبأقل مساحة تخزينية لازمة، وخاصة إذا ما استخدم الحاسب الآلي (الحاسوب) في تحليل الشبكات.

## الفصل الخامس

### تحليل الشبكات

#### Network Analysis

كثير من المشاكل والمشاريع التي تسم بالتعقيد يمكن أن نغير عنها على شكل شبكة الأعمال Network، وترجع أهمية دراسة تحليل الشبكات إلى وجود العديد من المشاكل العملية الهامة يمكن تركيبها أو التعبير عنها في صورة شبكات الأعمال، حيث إن حل تلك المشاكل يكون سهلاً وميسراً إذا كان هناك إلمام بالقواعد التي نتعامل بها مع تحليل الشبكات. ويوجد الكثير من المشاكل التي تتعلق بالبرمجة الخطية يمكن التعبير عنها في صورة تحليل الشبكات ويكون حلها أسر مقارنة بنماذج البرمجة الخطية.

#### تعريف تحليل الشبكات:

● تحليل الشبكات هو عبارة عن أسلوب في لتخطيط وجدولة ومراجعة المشروعات عن طريق تخفيض إدارة المشروعات الكبيرة إلى خطوات محددة.

● تحليل الشبكات هو مجموعة من النقط (Vertices, Nodes) وخطوط (Arce) تصل تلك النقط بعضها البعض حيث إن كل نقطة ترتبط بنقطة أو أكثر من خلال مجموعة من الخطوط.

#### النماذج الرئيسية لتحليل الشبكات:

يمكن تقسيم تحليل الشبكات إلى الأقسام التالية:

##### 1- نماذج أقصر الطرق Shortest-Path Model :

تستخدم هذه النماذج عند الرغبة في تحديد أقصر طريق بين نقطتين أو أقصر طريق بين نقطة معينة وجميع النقاط الأخرى في شبكة الأعمال أو أقصر طريق بين كل نقطتين في شبكة الأعمال.

##### 2- نماذج أقصى تدفق Maximum-Flow Models :

نستخدم هذه النماذج لتحديد أقصى تدفق من الأرباح يمكن أن يحققه شبكة الأعمال.

عندما يكونان في ممرات مختلفة Path.

2 - الأنشطة التخيلية المتشابهة: تستخدم للفرقة بين نشاطين أو أكثر قد يكون لهما نفس رقم الحدث.

— أحداث Events (O) - يطلق على بداية أو نهاية أي نشاط بالأحداث؛ فالحدث عبارة عن نقطة زمنية، أو بنس المعنى الحدث هو إنجاز معين يتم عند نقطة معروفة من الزمن.

— الشبكة: وهي عبارة عن تصوير لخطة مشروع معين، وهي توضح العلاقات المتاخمة بين أنشطة المشروع وقد يطلق على الشبكات (الرسم السهمي) أي بالأسم، وعندما يتم حساب الوقت يطلق عليها الشبكة ويمكن أن تستخدم كجدول زمني للمشروع. يمكن القول بأن الشبكة أو الرسم الشبكي يتكون من مجموعة من النقاط يطلق عليها حدث أو أحداث تتصل ببعضها البعض بالأسم أو بالخطوط. ولما فإن التحليل الشبكي يعتمد على تقسيم المشروع إلى مجموعة من المراحل ندعوها بالأحداث، حيث يتم تمثيلها بيانياً بشكل دوائر أو حلقات من خلال خرائط انسيابية ذات اتجاه تدفقي معين، تتصل في ما بينهما بأسم أو خطوط وتظهر الفترة الزمنية اللازمة للانتقال من حدث إلى آخر، ندعو هذه الأسم التي تتصل بين الأحداث المختلفة بالنشاطات وتقوم النشاطات المختلفة بترتيب الأحداث حسب تتابع زمني أو منطقي معين للعمل، حيث تشير إلى مكان وقوع الحادثة والفترة الزمنية اللازمة لإنتاج هذه الحادثة وعلاقتها بالأحداث الأخرى.

وتسمى مجموعة الأحداث أو الحلقات والأسم مجتمعة مع بعضها البعض في شكل بياني «بالشبكة البيانية»، وتستخدم هذه الشبكات عادة في تحديد أقل زمن ممكن للانتهاء من المشروع أو أقل تكلفة ممكنة لتحقيق عمليات الإنتاج الممكنة، ووضع البدائل الممكنة لتقليص الفترات الزمنية أو التكلفة من ضمن الشروط والموارد المتاحة للمشكلة المطروحة.

### بعض الأخطاء في بناء الشبكة البيانية:

1 - خطأ الدائرية Looping: عندما تقوم برسم النشاط وهذا النشاط يتوقف على نشاط آخر ظاهرياً من الرسم وغير ممكن عملياً. ففي الرسم التالي نجد أن النشاط (L) يتوقف على النشاط (N) الذي يتوقف بدوره على النشاط (M). ولهذا يجب تجنب الدائرية في الشبكات.

وأخيراً يمكن أن نقول باختصار بأن أسلوب تحليل الشبكات يعتبر ثورة جديدة في التخطيط عن طريق تحسين الوقت ومراقبة التكاليف بالمقارنة بالأساليب التخطيطية والتقليدية الأخرى.

### بناء شبكة المشروع:

تعتبر الخطوة الأولى في تطبيق تحليل الشبكات (المسار الحرج وبيروت) هي التعرف على المشروع الذي يجب أن يخطط له، وذلك عن طريق تحديد الوظائف والأنشطة التي يتكون منها، ورسم هذه الأنشطة بيانياً في شبكة تدفق Flow Chart. ويطلق على هذه المرحلة الوجه التخطيطي للمشروع، أي إعداد «مسودة» للخطة. ولكن قبل الشروع في بناء هذه الخطة توجد هناك قواعد وشروط أساسية يجب أن نأخذها بعين الاعتبار.

### القواعد والشروط الأساسية لبناء شبكة المشروع:

- 1 - تبدأ الشبكة البيانية بالحادثة البدائية والتي لا يصلها أي سهم، وتنتهي بالحادثة النهائية والتي لا يخرج منها أي سهم.
- 2 - كل حادثة (دائرة) مرحلية يجب أن يصلها سهم (نشاط) واحد على الأقل ويخرج منها سهم واحد على الأقل، ويجوز أن يكون أكثر من ذلك.
- 3 - كل نشاط (سهم) يجب أن تسبقه وتنبهه حادثة (دائرة) ما عدا الحادثة البدائية والنهائية.
- 4 - يجب أن لا يكون في الشبكة أقسام معزولة ليس لها علاقة بالعمل في المشروع.
- 5 - لا يجوز أن تعود الأنشطة في الشبكة إلى نفس النقطة التي بدأت منها.

### بعض المصطلحات الأساسية لبناء الشبكة البيانية:

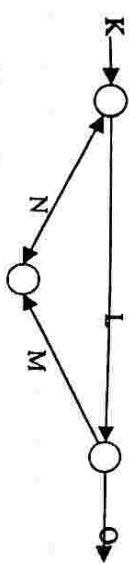
— النشاط (→): النشاط Activity هو العمل اللازم لإتمام حدث معين. ولكل نشاط نقطة بداية ونقطة نهاية. ويستغرق النشاط وقتاً زمنياً معيناً بين بدايته ونهايته. وتصدر الأنشطة في شكل أسهم يكتب عليها الوقت المقدر للانتهاء والموارد اللازمة الزمن (→).

— النشاط الوهمي أو التخيلي أو الافتراضي Dummy Activity: وهي الأنشطة التي تضاف إلى الشبكة وذلك لغرض استكمالها، ولكن ليس لها تأثير على الشبكة أو التكاليف أو الموارد. وهذه الأنشطة لها علاقة تبعية بين نشاط ونشاط آخر، وقد يطلق عليها «بالأسم التبعية» ويوضع عليها وقت يساوي صفراً (الزمن = صفر) وهي من نوعين:

- 1 - الأنشطة التخيلية المنطقية Logic Dummy: وهي توضح اعتماد نشاط على آخر

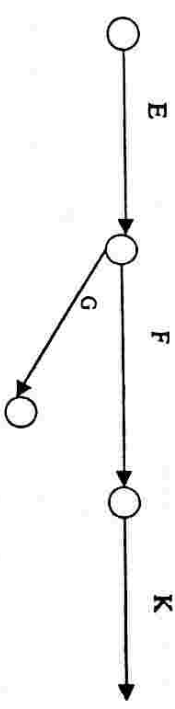


شكل (5-1)



2- مشكلة الأنشطة المعلقة: وهي التي لا تعتمد على نشاط آخر غير نقطة النهاية ويطلق عليها خطأ ديول "Dangling"، كما هو موضح في الشكل (5-2) وهذا يكسر قاعدة الاعتمادية التي تحكم في الشبكات.

شكل (5-2)



### طرق تحليل الشبكات:

يعتبر كل من أسلوب تقييم ومراجعة البرامج (PERT)<sup>(1)</sup> واسلوب المسار لحرج (CPM)<sup>(2)</sup> أعداداً طبيعياً لأساليب التحليل الشبكي التي جرى استخدامها في العلوم الطبيعية والهندسية منذ قرون. غير أن الميلاد الحقيقي لهذين الأسلوبين كأدوات إدارية فعالة في تخطيط وجدولة تنفيذ المشروعات ومراقبة عمليات التنفيذ والرقابة عليها، قد تم أواخر الخمسينيات من القرن العشرين. وقد انتشر استخدام هذا الأسلوب أيضاً منذ ذلك التاريخ في كل من المجالات الاستراتيجية ومجالات تخطيط وجدولة تنفيذ المشروعات باختلاف أنواعها.

فنجد أن الأسلوبين "بيرت" والمسار الحرج يتشابهان من حيث الأسس والأطر والإجراءات. فكل منهما يؤدي إلى توفير أفضل الخطط لتنفيذ المشروعات طبقاً لاتباعها الزمني والتقني، كما يوفر البيانات اللازمة للمتابعة بكفاءة، عن طريق التركيز على المهام

أو العمليات التي تمثل مراكز الاختناق. غير أنهما يختلفان من حيث أسس وإجراءات حساب الزمن اللازم لتنفيذ كل مهمة أو عملية من عمليات المشروع. ويعتبر الأسلوبان من أهم الأساليب لإدارة تنفيذ المشروعات حيث يمكنان من أداء الوظائف وإنجاز المهام المتعلقة بالتخطيط والجدولة والمناوبة بكفاءة عالية.

لقد أصبحت مجالات تطبيق كل من أسلوبي المسار الحرج وتخطيط ومراجعة البرامج من التمدد والتناثر بحيث يمكن القول إنهما يصلحان للتطبيق في مجال من المجالات ما دامت الشروط والخصائص اللازمة لتطبيقهما متوافرة. فيمكن تطبيقهما في مجالات تتراوح بين تخطيط وإبتكار وتوزيع وانتشار منتج وبين تخطيط وجدولة وتنفيذ مشروع استراتيجي جيوي وهام وكبير. فهما يستخدمان في المشروعات الإنشائية للمباني والمصانع والطرق والكباري، وفي تخطيط وجدولة إنتاج الآلات والمعدات والسفن والطائرات، وفي تخطيط وتنفيذ خطط انتشار الأسلحة الاستراتيجية وغيرها. وهما في كل الأحوال يحققان الأهداف التالية:

1- جدولة تنفيذ العمليات المختلفة والمهام المتعددة للمشروع كله بحيث يتم في أقل وقت ممكن وبأقل التكاليف الممكنة.

2- تحديد المهام والأنشطة التي تستلزم عناية خاصة أثناء التنفيذ حتى يمكن تلافي الاختناق والتأخير في عمليات التنفيذ، ويؤدي ذلك إلى تحقيق وفورات لا يستهان بها في تكاليف التنفيذ وفي المعائد المقفود نتيجة التأخير في التنفيذ.

وسوف نبين استخدام كل من الأسلوبين بقليل من التفصيل في هذا الفصل بهدف توضيح المفاهيم وخطوات التطبيق العملي.

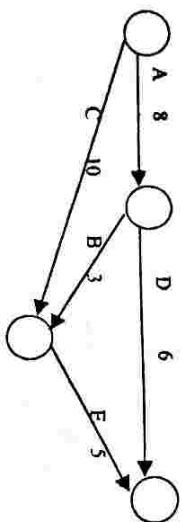
### بناء نموذج التحليل الشبكي:

يلزم تطبيق أسلوب المسار الحرج أو أسلوب تخطيط وجدولة المشروعات، أن يتم تحليل المشروع أو تجربته إلى مهام محددة وواضحة. فليز أن يتم تحديد وتعريف كل جزئية من المشروع والمهام اللازمة لتنفيذها بوضوح ودقة حتى تتوافر إمكانية التمييز بين الأنشطة أو المهام المؤدية إلى إنجاز كل جزئية من الجزئيات، والأحداث المترتبة على هذا الإنجاز والمترتبة لها. وفي إطار نماذج التحليل الشبكي يكون للنشاط أو المهمة دلالة محددة كما يكون للحدث مغزى معين.

فالنشاط أو المهمة هي أداء وظيفي يستنفذ موارد اقتصادية ويتم تعريفه بدلالة الزمن اللازم لإنجازه، وعندما يتحقق إنجازَه باستنفاد الزمن المقرر له يتحقق حدث معين. والحدث المعين يكون بالنتيجة هو اللحظة الزمنية الموزنة بانتهاء النشاط أو المهمة (أو بانتهاء النشاط أو المهمة)، أو بإنجاز جزئية معينة من المشروع (أو البدء في جزئية معينة

(1) Program Evaluation and Review Technique.  
(2) Critical Path Method.

(5-3)



أمثلة عن كيفية بناء الشبكة البيانية:

مثال (2) - رسم الشبكة البيانية عن طريق استخدام الأحداث:

مشروع لإنشاء مصنع يتضمن الأحداث والأنشطة المبينة في الجدول (2-5)

جدول (2-5)

الأنشطة	الأحداث	الزمن/أسبوع
أ	2-1	2
ب	3-1	1
ج	5-2	3
د	6-2	5
هـ	5-3	4
و	6-5	1
ز	4-3	3
س	7-4	2
ص	8-5	7
ع	8-6	6
م	8-7	1

المطلوب: رسم شبكة المشروع حسب تعاقب الأنشطة.

من المشروع). فبعد التفكير في بناء المنزل، يوجد هناك العديد من الأنشطة أو المهام أو الأعمال يلزم إجراؤها، مثلاً حفر القواعد، بناء الجدران، وضع السقف، تركيب النوافذ والأبواب، الخ. فمثلاً حفر القواعد يعد نشاطاً أو مهمة تستغرق وقتاً وتستنفذ طاقة وجهداً. وعند البدء في الحفر يتحقق حدث، وعند الانتهاء من عملية الحفر يتحقق حدث وهكذا.

وبعد أن يتم تحليل المشروع إلى الأنشطة والمهام اللازمة لتنفيذه وتحديد أحداث البدء والإنجاز الخاصة بكل نشاط أو مهمة، يتم وضع نتائج هذا التحليل في جدول «التتابع الفني لإنجاز عمليات المشروع» ككل. وحيث أن الأنشطة والمهام هي التي تستغرق وقتاً بينما الأحداث لا تستغرق أي وقت، فإن التتابع الفني للعمليات يحدد الأزملة اللازمة لإنجاز كل نشاط أو مهمة عن طريق علاقات أحداث البدء والانتهاء.

وبعد أن يتم إعداد جدول (أو جداول) التتابع الفني لعمليات تنفيذ المشروع (أو لجزئياته إذا كان المشروع كبيراً)، يتم إعداد خريطة شبيكية توضح هذا التتابع والأنشطة والأحداث المميزة له والأزملة اللازمة لإنجاز كل نشاط من الأنشطة. وقد جرت العادة على تمثيل النشاط أو المهمة على الخريطة بسهم تقع قاعدته عند حدث بدء النشاط وتقع قمته عند حدث انتهاء النشاط، كما جرت العادة على تمثيل الأحداث بدوائر تربط الأنشطة أو المهام ببعضها البعض. والمثال رقم (1) يبين ذلك:

جدول (1-5) التتابع الفني للمبانيات

النشاط	توصيف النشاط	أسبقية الأنشطة	الزمن اللازم بالساعة
A	حفر القواعد	-	8
B	بناء الجدران	A	3
C	إحضار الأدوات والمعدات	-	10
D	تنظيف الأرضية	A	6
E	وضع السقف	BC	5

ولأنه يمكن بناء خريطة التتابع الفني للعمليات والتي تحتوي على التسميات الرمزية للأنشطة المختلفة، وكذلك الأزملة اللازمة لإنجاز كل منها. وقد جرت العادة على وضع التسمية الرمزية للنشاط أعلى السهم الخاص به ووضع الزمن اللازم لإنجاز النشاط أسفل السهم. وإذا قمنا بإجراء ذلك من واقع جدول التتابع الفني لظهرت خريطة التتابع الفني بأزملة الإنجاز كما هو موضح بالشكل (3-5).

مثال (4) - رسم الشبكة البيانية عن طريق استخدام كلمة (تلي):

مشروع معين له سبعة أنشطة وذلك حسب الترتيب التالي (C تلي A) & (B تلي A) & (E,D تلي B) & (F تلي C,D) & (G تلي E,F). ولقد كانت المعلومات المعروفة والمعطاة بالفترة الزمنية لتنفيذ كل نشاط هي كما في الجدول (4 - 5).

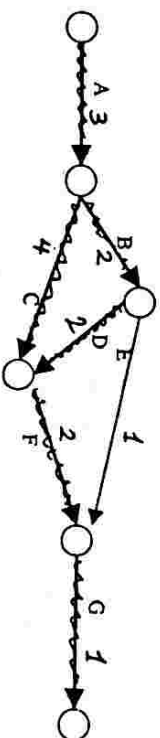
جدول (4 - 5)

الأنشطة	A	B	C	D	E	F	G
الزمن/أسبوع	3	2	4	2	1	2	1

المطلوب: بناء شبكة المشروع وتحديد المسارات والمسار في الشبكة.

الحل:

شكل (5 - 6)



مثال (5) - رسم الشبكة البيانية عن طريق استخدام العبارات اللغوية:

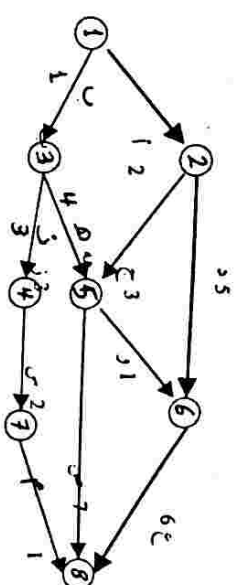
ترغب شركة أمان للإطارات بتقديم منتج جديد، وهو عبارة عن إطار لجرار ثقيل (D8). ولقد كانت المعلومات المعروفة لدى الشركة من الأنشطة اللازمة لتنفيذ هذا المشروع مفرقة بالوقت بالوقت اللازم لتنفيذها بالأشهر، وكذلك ترتيب هذه الأنشطة مبينة في الجدول (5 - 5).

جدول (5 - 5)

الأنشطة	الوصف	الأنشطة السابقة له	الزمن/شهر
A	ترسيخ مبنى المصنع الحالي	-	9
B	الاتصال بمتسجي الآلات واستقبال العروض	A	7
C	إستيراد الآلات	A	6
D	تركيب الآلات	C	4
E	تدريب المتسجين على الآلات الجديدة	B	6
F	التقسيم المبدئي للآلات الجديدة	D, E	9
G	التقسيم النهائي للآلات الجديدة	B	7

الحل:

شكل (5 - 4)



مثال (3) - رسم الشبكة البيانية عن طريق استخدام المسارات:

ظهرت البيانات التالية لدى شركة النجاح كما في الجدول (3 - 5).

جدول (3 - 5)

الأنشطة	A	B	C	D	E	F	G
الزمن/يوم	5	4	3	1	7	2	1

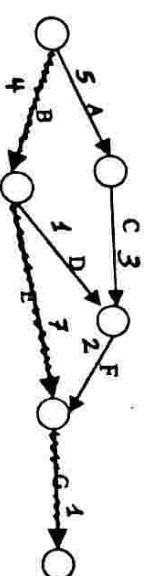
علماً بأن المسارات لهذه الأنشطة هي كالآتي وهي على التوالي:

- المسار الأول: A → C → F → G
- المسار الثاني: B → D → F → G
- المسار الثالث: B → E → G

المطلوب: بناء الشبكة البيانية لهذه الشركة وتحديد المسار الحرج على الشبكة.

الحل:

شكل (5 - 5)



والتي تتصل في ما بينها بعدد من الأسهم الأنشطة. ويمثل المسار الحرج وقت الإنجاز المبكر للمشروع ككل، والذي لا يمكن التفكير في إتمام الإنجاز أو التنفيذ عنه دون تحمل تكاليف إضافية.

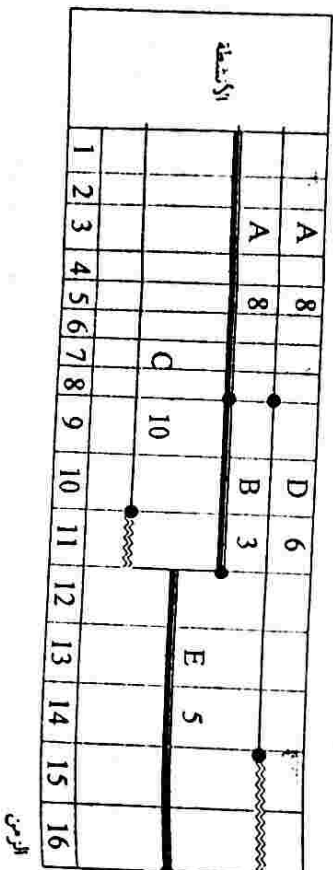
ويمكن تحديد المسار الحرج عن طريق حصر جميع المسارات على خريطة التتابع الفني وتحديد الأزمنة اللازمة لإنجاز كل منها وتحديد أكثرها استغناء للوقت ليكون المسار الحرج. وفي المثال الأول (1) يمكن تحديد المسارات المختلفة في خريطة التتابع الفني للمبانيات كما هو مبين في الجدول (5-7).

جدول (5-7)

المسار	الزمن بالأسبوع	مجموع الأسابيع
A → D	$= 6 + 8$	14
A → B → E	$= 5 + 3 + 8$	16
C → E	$= 5 + 10$	15

وعلى هذا فإن المسار الثاني (A, B, E) يمثل المسار الحرج، إذ أنه يشكل أطول طريق زمني بين تقطعي البداية والنهاية، وبعبارة أخرى إنه يشكل أكبر فترة زمنية يحتاجها المشروع لإتمامه ومقدار هذه الفترة = 16 أسبوعاً. ولكن لماذا هذا المسار يمثل أفضل مسار رغم أنه أطول زمن يأخذه؟ نستطيع أن نقول بأن هذا المسار الحرج لا يوجد به وقت ضائع. وعن طريق خريطة الأعمدة التالية نستطيع أن نتبين من ذلك.

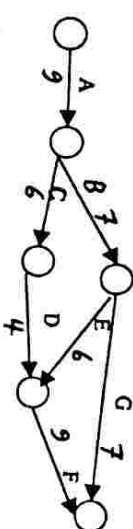
شكل (5-9) خريطة الأعمدة



المطلوب: ارسم شبكة المشروع.

الحل:

شكل (5-7)



مثال (6) رسم الشبكة البيانية عن طريق استخدام وجود أنشطة تخطيطية داخل الشبكة:

مشروع معين له ستة أنشطة، المعلومات المتوفرة لدى المشروع مبينة في الجدول (5-6)

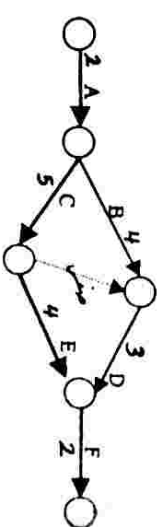
جدول (5-6)

الأنشطة	A	B	C	D	E	F
الأنشطة السابقة لها	-	A	A	BC	C	DE
الزمن/أسبوع	2	4	5	3	4	2

المطلوب: بناء الشبكة البيانية للمشروع.

الحل:

شكل (5-8)



# 1- طريقة المسار الحرج (CPM) The Critical Path Method

الهدف الأول لتحليل الشبكات هو تحديد المسار الحرج Determining the Critical Path، ويعرف المسار الحرج بأنه هو ذلك المسار على الخريطة والذي يشكل أطول الطرق بين الحادثة الابتدائية والحادثة النهائية، بحيث يمر بعدد من الحوادث المتتالية

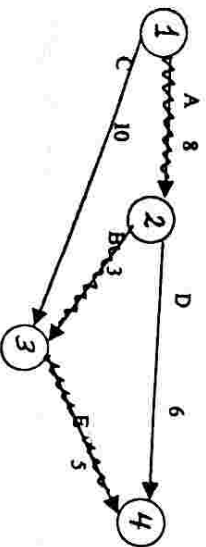
أعلى من العمل في الأوقات العادية، كما أن تكثيف الموارد في مشروع معين يؤدي إلى فقدان العائد الذي يمكن الحصول عليه بانشارها في عدد من المشروعات بدلاً من مشروع واحد.

وقد يترتب على ذلك أنه عندما يتم تقدير أزيمة إنجاز الأنشطة المختلفة، يؤخذ في الاعتبار عامل التكلفة بالإضافة إلى عامل الزمن، عن طريق تقدير زنتين (على الأقل) لإنجاز كل نشاط. وعادة ما يكون أحد هذين الزنتين مطوياً على الظروف الطبيعية التي لا تتطلب تكثيف الموارد ولا تقتضي التمعجل بال تنفيذ. وبالتالي يصبح لكل نشاط تكلفتان للتنفيذ أساس تكثيف الموارد والمعجل بال تنفيذ. وبالنسبة لكل نشاط تكلفتان للتنفيذ إحداهما للزمن العادي والأخرى للزمن المعجل، ومن الطبيعي أن تكون تكلفة التمعجل أعلى من تكلفة التنفيذ في الظروف العادية.

ولا شك في أن علاقة الزمن بالتكلفة تختلف من نشاط إلى آخر على حسب طبيعة الموارد اللازمة لتنفيذه وبرامج التمعجل الزمني الملائم لإنجازه، وعادة ما تكون هذه العلاقة في حقيقتها غير خطية حيث من المنطقي أنه كلما زاد تكثيف الموارد انخفضت إنجائها في الوقت الذي ترتفع فيه تكلفتها. فتوفر وحدة زمنية واحدة من الوقت اللازم لإنجاز نشاط معين لا شك يتطلب تكلفة مضاعفة تقل عن التكلفة المضاعفة لتوفير الوحدة الزمنية التالية. وبالرغم من ذلك يفترض عادة أنه في ظل مدى تمعجل زمني معين تكون العلاقة بين الزمن والتكاليف خطية للأنشطة المرغوب التمعجل بتنفيذها في حدود ذلك المدى.

ومن المنطقي أن تكون علاقة الزمن بالتكاليف عكسية؛ أي أنه كلما طال الزمن المسموح به لإنجاز نشاط معين قلت التكاليف اللازمة لإنجاز هذا النشاط. وهذا بالطبع يفترض ثبات معدلات الأسعار والأجور على مدار فترة التنفيذ العادية. كما أنه كلما قصرت الفترة الزمنية المسموح بها لإنجاز نفس النشاط زادت التكاليف اللازمة للإنجاز (للمعمل الإضافي وتكثيف الموارد مثلاً). ولنفرض على سبيل الإيضاح المثال رقم (1) على الشكل (10 - 5).

شكل (10 - 5)



ملخص للخطوات التي يجب اتباعها لتحديد المسار الحرج على شبكة المشروع

- 1- تحديد أنشطة المشروع وتحديد العلاقات بين هذه الأنشطة بالإضافة إلى تحديد الوقت اللازم لتنفيذ كل نشاط.

- 2- رسم أو بناء شبكة المشروع مع مراعاة التسلسل لتنفيذ الأنشطة تبعاً للعلاقات بينها.

- 3- تحديد الزمن المبكر للبدء (وقت البداية) لكل نشاط وساري مجموع الأزمنة التي تسبق النشاط. دائماً يكون يساوي صفرًا لأول نشاط (أنشطة) في بداية المشروع.

- 4- تحديد الزمن المبكر للإنجاز (الإنهاء المبكر) لكل نشاط وساري مجموع الأزمنة التي تسبق النشاط + مدة إنجاز النشاط نفسه.

- 5- تحديد البداية المتأخرة لكل نشاط وساري أقصى تأخير (تأجيل) في الأزمان المبكرة للأنشطة بحيث لا يؤثر ذلك التأخير في إنجاز المشروع.

- 6- تحديد النهاية المتأخرة للإنجاز لكل نشاط، وساري زمن البداية المتأخرة للنشاط + مدة إنجاز النشاط نفسه.

- 7- تحديد الوقت الفائض = زمن البداية المتأخرة - الزمن المبكر للبدء.

= زمن النهاية المتأخرة للإنجاز - الزمن المبكر للإنجاز.

ويمثل الوقت الفائض الفترة الزمنية التي يمكننا بمقدارها تأخير البدء بتنفيذ وظيفة أو مجموعة من الوظائف دون أن يؤدي هذا التأخير إلى التأخير في إنجاز المشروع.

#### تخفيض فترة تنفيذ المشروع:

الهدف الثاني لتحليل الشبكات هو تخفيض فترة تنفيذ المشروع. تقدر فترة تنفيذ المشروع عادة بفترة المسار الحرج للشبكة البينانية، وقد تظهر الحاجة ملحة في بعض الظروف إلى تقليص فترة إنجاز المشروع، أو إلى تقليص فترة مرحلة من مراحل المشروع، فنعلم لنجا إلى ما يدعى «عمليات المقايضة»، وتبني هذه العمليات، إمكانية التبادل بين التكلفة والزمن Time-Cost, Trade-Off من أجل تقليص الفترة الزمنية بزيادة رأس المال الموضوع في المشروع (وعال بناء المنزل).

تخفيض أو تقليص الفترات الزمنية للمسار الحرج يتبعه عادة دراسة مقارنة لمرحلة الإنتاج أو البناء التي يمكن معها تقليص (تخفيض) فتراتها الزمنية، إذ أن كثيراً من المراحل لا يمكن تقليص فتراتها الزمنية بسبب نوعية العملية الإنتاجية أو الإنشائية (مثلاً حاجات التبريد البطيء للمعادن، حالات الجفاف للإسمنت المسلح، وغيرها)، كما لا بد من دراسة المنفعة الحدية للتقليص والفائدة التي نحصل عليها مقابل زيادة النفقات.

قد يتضح من حساب المسار الحرج لتنفيذ مشروع معين أن الزمن اللازم للتنفيذ في ظل الظروف العادية أطول مما هو مرغوب. والواقع أنه كلما كان المشروع كبيراً، وكلما طالت فترة تنفيذه، ازدادت درجة المخاطرة في ما يتعلق بالمعادن أو المنفعة المرجوة منه وأصبح أكثر تعرضاً للتأثر بالتقادم التقني. ولا شك أن معظم الأنشطة التي يلزم تنفيذها فترة طويلة من الزمن يمكن تنفيذها في فترات أقل بتكاليف أكبر. فالعمل الإضافي تكلفته

## جدول (10 - 5) التكاليف الإضافية

الأنشطة	الزمن والتكاليف المادية		الزمن		التكاليف الإضافية		التفصيل (التخفيض)	
	الزمن	التكلفة	يمكن تخفيضه	أقل زمن	أقصى تكلفة	نتيجة التخفيض	أصل	المستعمل
A	8	12000	6	2	14000	3	B	11
B	3	14000	2	2	17000	1	-	11
C	10	6000	7	4	8000	6	D	11
D	6	8000	4	2	1000	2	/	11
E	5	7000	2	2	900	3	///	11

$$800 = 2 \div 1600 = 6 - 8 \div 12000 - 13600 = (A)$$

دينار/أسبوع.

الخطوات التي يجب اتباعها في حال تخفيض زمن الشبكة:

- 1- يمكن تخفيض أي نشاط يقع على المسار الحرج بحيث يكون هذا النشاط يمثل أقل تكلفة متزايدة من الأنشطة الأخرى.
- 2- في حالة وجود نشاط معين يمثل أقل تكلفة متزايدة ويقع في المسار الحرج، ولكن هذا النشاط في حالة تخفيضه لا يؤثر في زمن الشبكة فيجب النظر إلى نشاط آخر يقع في المسار الحرج.

الشبكة البيانية السابقة وهي كالآتي:

وبافتراض أن الزمن الذي يمكن تخفيضه والتكاليف المباشرة للمشروع معينة في الجدول (8 - 5).

## جدول (8 - 5) الزمن والتكاليف

الأنشطة	الزمن المادي	التكاليف المادية	الزمن الذي يمكن تقليصه	التكاليف التي يمكن إضافتها
A	8	12000	6	13600
B	3	14000	2	17000
C	10	6000	7	10500
D	6	8000	4	10000
E	5	7000	2	9700
		47000		

المطلوب:

- 1- أحسب مجموع التكاليف المباشرة لإنهاء المشروع بزمن 16، 15، 14، 13، 12، 11 أسبوعاً.
- 2- التكاليف غير المباشرة للمشروع موضحة في الجدول (9 - 5). أرسم التكاليف الكلية للمشروع (المباشرة وغير المباشرة) وأوجد زمن الإنهاء للمشروع الذي يبين أقل تكلفة ممكنة؟

## جدول (9 - 5) التكاليف غير المباشرة

زمن إنهاء المشروع	16	15	14	13	12	11
التكاليف غير المباشرة (دينار)	23000	19100	17200	14400	13700	13200

الحل:

- (1) يمكن وضع الجدول التالي الذي يبين التكلفة المتزايدة (التكلفة الإضافية) الناشئة عن تخفيض أو تقليص زمن كل نشاط.

التكلفة الإضافية = أقصى تكلفة يمكن إضافتها - التكاليف المادية ÷ الزمن المادي - أقل زمن يمكن تخفيضه



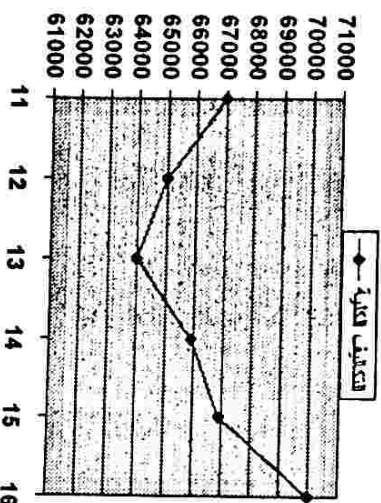
(2) الجدول (5 - 11) يبين الزمن والتكاليف الكلية:

جدول (5 - 11) التكاليف المباشرة وغير المباشرة والكلفة

الزمن	11	12	13	14	15	16
التكاليف المباشرة	53800	51300	49600	48700	47800	47000
التكاليف غير المباشرة	13200	13700	14400	17200	19100	23000
مجموع التكاليف	67000	65000	64000	65900	66900	70000

الآن يمكن رسم الشكل البياني الذي يمثل الزمن والتكاليف في الشكل (5 - 12)

شكل (5 - 12) منحنى التكاليف الكلية



من خلال الرسم البياني (5 - 12) يمكن أن نقارن بين الزمن والتكلفة. فنجد أن

الزمن 13 أسبوعاً هو الذي يحقق أقل تكلفة (64000)

الأنشطة الوهمية أو التخيلية أو الافتراضية Dummy Activity:

في بعض الأحيان نحتاج إلى بعض الأنشطة الوهمية وذلك لتوضيح بعض العلاقات التابعة، مثلاً أن نشير إلى أن حدثاً معيناً لا يمكن أن يحدث قبل حدث آخر، ونرسم سهماً يربط بين الحدثين رغم علماً بأنه لا يوجد نشاط حقيقي بين هذين الحدثين، حيث إن هذا السهم يعبر عن نشاط وهمي Dummy Activity. ويعرف النشاط الوهمي على أنه النشاط الذي لا يستغرق وقتاً ولا يحتاج إلى موارد (صفر) ويرسم بخطوط مقطعة لنميزه عن النشاط الحقيقي.

ويمكن أن نستخدم الأنشطة الوهمية في الحالات التالية:

1 - للتعبير عن علاقات منطقية متتابعة بين الأنشطة المختلفة حيث لا يمكننا أن نغير عنها بطريقة أفضل.

شكل (5 - 11) الشبكات البيانية الممثلة

(1)		الزمن العادي = 16 أسبوعاً التكاليف العادية = 47000 المسار الحرج A → B → E = CP
(2)		النشاط الذي يمكن تخفيضه والذي يقع في المسار الحرج ويمثل أقل تكلفة إضافية هو النشاط (A). التخفيض الآخر هو النشاط (E). الزمن الآن = 15 أسبوعاً التكاليف الجديدة = 47800 = (800) 1 + 47000 المسار الحرج A, B, E, C, E (CP)
(3)		النشاط الذي يمثل أقل تكلفة إضافية هو النشاط (A). ولكن في هذه الحالة لا يخفض زمن الشبكة. البديل الآخر هو النشاط (E). الزمن الآن = 14 أسبوعاً التكاليف الجديدة = 48700 = (900) 1 + 47800 المسار الحرج A, B, E, C, E (CP)
(4)		في هذه الحالة يكون أفضل نشاط يمكن تخفيضه هو النشاط (E) بأسبوع واحد الزمن الآن = 13 أسبوعاً التكاليف الجديدة = 48700 = (900) 1 + 49600 = (900) 1 + 49600 المسار الحرج (CP) = A, D, C, E المسارات في الشبكة تعتبر مسارات حرجية
(5)		يمكن تخفيض النشاط (E) بأسبوع آخر والنشاط (A) الزمن الآن = 12 أسبوعاً التكاليف الجديدة = 49600 = (800) 1 + (900) 1 + 51300 = 51300 المسار الحرج (CP) = A, D, C, E المسارات في الشبكة تعتبر مسارات حرجية
(6)		يمكن تخفيض زمن النشاط (C), (D) الزمن الآن = 11 أسبوعاً التكاليف الجديدة = 51300 = (1500) 1 + (1000) 1 + 53800 المسار الحرج (CP) = كل المسارات في الشبكة تعتبر مسارات حرجية

(\*) المقصود بـ Critical Path (CP) المسار الحرج.

## II - طريقة بيرت أو أسلوب تقييم ومراجعة البرامج

### Program Evaluation Review Technique (PERT)

تستخدم طريقة 'بيرت' كأداة مساعدة للدراسة إحصائية لتقييم المسار الصحيح في الشبكة البيانية ولمعرفة مدى الاحتمالي من الزمن الذي يمكن استغلاله في باقي المسارات غير الحرجة ودون بذل أية خسارة زمنية، إذ أن تقليص أو تمديد الفترة الزمنية لأي عمل يعتمد على زيادة أو نقصان النفقات المصروفة على هذا العمل، والسؤال الذي يمكن أن يطرح نفسه الآن هو إمكانية وضع الشبكة البيانية بحيث يمثل فيها أقل ضياع للنفقات من أجل تحقيق العمل المطلوب بأقل تكلفة ممكنة، وذلك انطلاقاً من الفترات الزمنية المتاحة والمناسبة للمشروع، ولذا كان لا بد من وجود معدل عام لاستمرار فترات العمل لكل حادثة وما يتبعها من نفقات، يعتمد عليه خلال معالجة عمليات المقارنة بين الوقت المحقق أو المسموح ووقت العمل الطبيعي، ويستخدم من أجل تحديد هذا المعدل ثلاثة أنواع من التقديرات هي:

أ - تقدير الوقت المثالي (Optimistic Time) ونرمز له بالحرف (O) وهو الوقت المقدر للانتهاء من العمل بين حادثتين، مأخوذاً لحدوده الدنيا، بحيث تكون جميع الشروط ملائمة لسير العمل دون أية عراقيل في التنفيذ، وهذا يمثل الوقت الأمثل لتحقيق الحادثة، ولا يمكن تقليل هذه الفترة إلى ما دون ذلك إلا بزيادة النفقات.

ب - تقدير الوقت الأكثر احتمالاً (Most Likely Time) ونرمز له بالحرف (M). وهو الوقت اللازم للانتهاء من العمل بين حادثتين، مأخوذاً من خلال التجربة والممارسات لمثل هذه الأعمال والحوادث.

ج - تقدير الوقت المتشائم (Pessimistic Time) ونرمز له بالحرف (P). وهو الوقت اللازم للانتهاء من العمل بين حادثتين، باعتبار جميع الظروف السيئة التي يمكن أن تطرأ على المشروع أثناء القيام بالعمل.

الوقت المتوقع: يحدد المعدل العام لاستمرارية فترات العمل بين كل حادثتين، من خلال مؤشر سوف ندعوه 'بالوقت المتوقع' وبحيث نرمز له بالحرف (Tij)، ويعبر هذا المؤشر عن التوقع لاستمرارية العمل بين الحادثة السابقة (I)، والحادثة اللاحقة (j)، ويقدر 'الوقت المتوقع' بالوسطي المعتدل لجميع التقديرات السابقة للأوقات وحسب العلاقة التالية:

$$T_{ij} = \frac{O + 4M + P}{6}$$

2 - من أجل تفادي الربط بين حادثتين بأكثر من نشاط، حيث إنه يمكن أن يكون عندنا نشاطان متوازنان ولكن يجب أن لا يرتبطا بحادثتين.

3 - تستخدم الأنشطة الزمنية أحياناً للإيضاح، حيث يجب أن يكون للشبكة نقطة بداية واحدة ونقطة نهاية واحدة أيضاً.

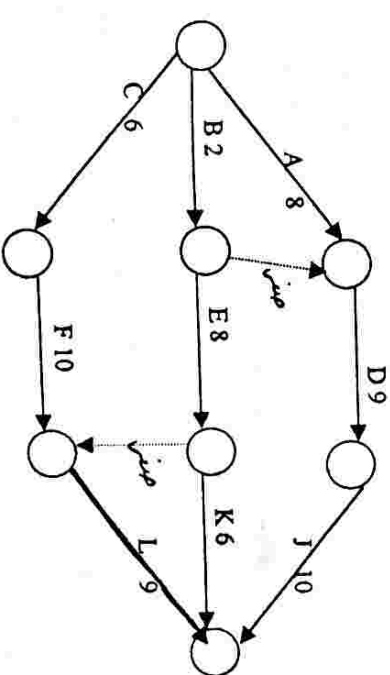
مثال رقم (7) يبين كيفية تحديد الأنشطة الزمنية على الشبكة البيانية:

جدول (5 - 12)

النشاط	اسمية الأنشطة	الزمن اللازم بالساعة
A	-	8
B	-	2
C	-	6
D	(AB)	9
E	B	8
F	C	10
J	D	10
K	E	6
L	(FE)	9

المطلوب: بناء الشبكة البيانية وتحديد الأنشطة الزمنية داخل الشبكة.

شكل (5 - 13)



1- الوقت المبكر لبدء النشاط (EST) The Early Start Time وهو الوقت المحدد لبدء النشاط الجديد بعد الانتهاء من الحوادث السابقة.

2- الوقت المبكر للانتهاء من النشاط (EFT) The Early Finish Time وهو الوقت المحدد للانتهاء من النشاط إذا كان قد بدأ في نفس الوقت المبكر لبدء العمل.

3- الوقت المتأخر لبدء النشاط (LST) The Late Start Time وهو آخر وقت زمني يمكن فيه بدء فيه العمل دون الإخلال بالوقت العام للمسار الصحيح، وباعتبار الوقت المتأخر للحوادث السابقة، إذ لا يمكن البدء بالنشاط إلا بعد الانتهاء من الحوادث السابقة.

4- الوقت المتأخر من النشاط (LFT) The Late Finish Time وهو آخر وقت زمني يمكن لنا فيه الانتهاء من إنجاز العمل المؤدي إلى الحادثة وذلك دون الإخلال بالوقت العام للمسار الصحيح.

5- الوقت المبكر للنشاط (ET) Early Time وهو الوقت الذي مضى على الإنشاء أو على البضاعة حتى وصولها هذه الحادثة، وبحسب الوقت المبكر عادة من العلاقة التالية:

$$ET(i) = ETD + T_{ij}$$

6- الوقت المتأخر للنشاط (LT) Late Time وهو الوقت الباقي للانتهاء من المشروع أو للانتهاء من العملية الإنتاجية، وبحسب هذا الوقت من خلال العلاقة التالية:

$$LT(i) = LTD - T_{ij}$$

إن الهدف من التحليل الشبكي بطريقة بيرت هو الحصول على هذين المؤشرين بالنسبة لكل حادثة من الحوادث (ET, LT) بالإضافة إلى تحديد الفائض من الوقت (Slack Time) للاستفادة منه في توفير الوقت أو تخفيضه أو زيادة الإنتاج، وبحسب فائض الوقت عادة من العلاقات التالية:

$$S_j = L_{ji} - ET$$

$$= LS - ES$$

$$= LF - EF$$

$$= LF - ES - D$$

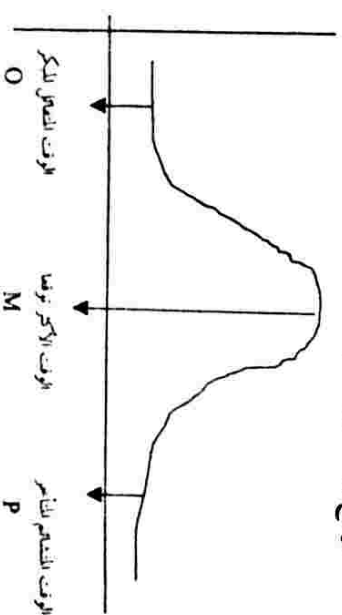
$$EF = ES + D$$

$$LS = LF - D$$

بحيث  $D = \text{الوقت اللازم للنشاط}$

شكل (14-5)

توزيع بيتا لتقديرات الوقت Beta distribution

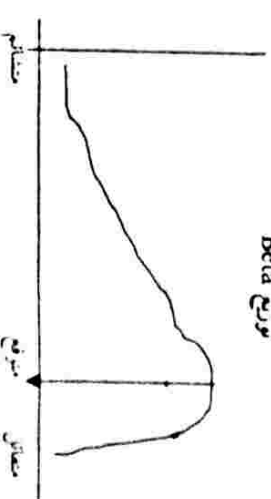


أما التباين المعروف لاستمرارية العمل (Tij) فإنه يعطى من خلال العلاقة التالية:

$$Var. = \frac{(P-O)^2}{6}$$

شكل (14A-5)

توزيع Beta



ومنها يمكن الحصول على الاحراف المعياري:

$$S = \frac{P-O}{6} =$$

وتستخدم (Tij) للتعبير عن الغيرة الزمنية لإحجاز النشاط القادم من الحادثة (D) والمتجهة إلى الحادثة (O) وذلك بالنسبة لكل حادثة من حوادث الشبكة، وبناء على هذا المفهوم يمكن أن نحدد عدداً من المؤشرات التي نستخدم بشكل واسع في تحليل الشبكات (البيانية حسب طريقة بيرت وهي:

جدول (5-13)

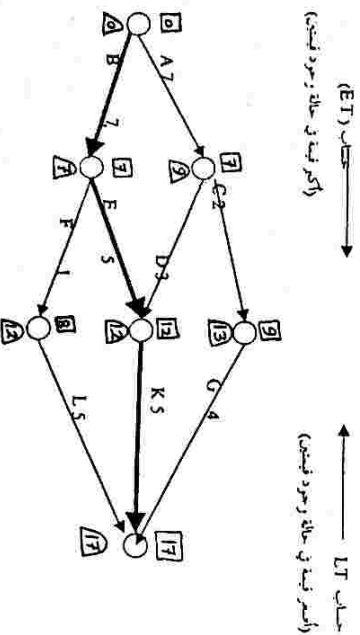
الحدث الثاني	الحدث الأول	زمن الأنشطة			الأنشطة السابقة لها	الأنشطة (العمل)
		الوقت المتنام	الوقت الأكثر احتمالاً	الوقت لمتناهي		
2	1	13	6	5	-	A
3	1	12	7	2	-	B
4	2	2.5	2	1.5	A	C
5	2	5	3	1	A	D
5	3	6	5	4	B	E
6	3	1	1	1	B	F
7	4	10	3	2	C	G
7	5	6	5	4	DE	K
7	6	7	5	3	F	L

## المطلوب :

- 1- رسم الشبكة البيانية، وحساب الوقت المتوقع (T<sub>ij</sub>)، والانحراف المعياري، ثم تحديد المسار الحرج على الشبكة.
- 2- أوجد الوقت المبكر (ET) والوقت المتأخر (LT). واحسب الوقت الفائض لكل الأنشطة الموجودة في الشبكة.

الحل:

- (1) بناء على الجدول السابق يمكننا رسم شبكة PERT كالآتي:
- شكل (15 - 5)



أما بالنسبة لجميع الحوادث الواقعة على المسار الحرج، فنجد أنها لا تحتوي على وقت فائض، إذ أن جميع النشاطات فيها تحقق العلاقة:

$$ET = LT$$

من أجل البحث عن الوقت المتأخر (LT) والوقت المبكر (ET) للحوادث في أية شبكة بيانية، لا بد من البدء في الحسابات انطلاقاً من الحادثة الأولى وحتى الحادثة الأخيرة بالنسبة للوقت المبكر (ET)، وبالعكس فإننا نبدأ بالحسابات من الحادثة الأخيرة (أو النهائية) في الشبكة وحتى أول حادثة وذلك بالنسبة للوقت المتأخر (LT)، بحيث نحصل على قيم صفيرية لكل من الوقتين (ET, LT) بالنسبة للحادثة البدائية. أما باقي الحوادث التي تقع على المسار الحرج فإن الوقت المبكر (ET) والوقت المتأخر (LT) يكونان متساويين وحسب العلاقات التالية:

وقت المسار العرج  $ET = LT =$  بالنسبة للحادثة النهائية

ET = LT = 0 بالنسبة للحادثة البدائية

حوادث المسار العرج  $ET = LT =$  بالنسبة لآية حادثة تقع على المسار العرج

وتوضيح قيم (ET) ضمن شكل مربع ( $\square$ ) إلى جانب كل حادثة، كما توضيح قيم (LT) ضمن شكل مثلثي ( $\Delta$ ) إلى جانب نفس الحادثة، بحيث يمكن لنا معرفة الوقت الفاقض بالنسبة لكل حادثة من خلال نظرة بسيطة إلى الشبكة، وطرح الوقت المبكر (ET) من الوقت المتأخر (LT).

ويمكن توضيح ما سبق تعريفه عن طريق المثال رقم (8)، ولنحسب من خلاله بطريقة بيرت الوقت المتوقع (ET) - الوقت المبكر (LT) والوقت المتأخر (LT) لكل حادثة ومن ثم يمكن أن نصل بسهولة إلى تحديد المسار الصحيح من خلال الوقت الفائض كما هو واضح في المثال التالي:

مثال رقم (8) لقد توفرت لدينا المعلومات الموضحة حسب الجدول التالي للشبكة:

الجدول (5-16) يبين التباين والانحراف المعياري لكل الأنشطة

جدول (5-16)

الأنشطة	A	B	C	D	E	F	G	K	L
الأحداث	1-2	3-1	4-2	5-2	5-3	6-3	7-4	7-5	5-6
الانحراف المعياري $(\frac{P}{6})$	1.3	1.7	.16	.7	.3	0	1.3	.3	.7
التباين $(\frac{P^2}{6})$	1.7	2.9	.03	.5	.09	0	1.7	.09	.5

(2) الوقت المبكر (ET) والوقت المتأخر (LT) والوقت الفائض لكل الأنشطة

الموجودة في الشبكة مبنية في الجدول (5-17)

جدول (5-17)

الأنشطة	الأحداث	الزمن	الوقت المبكر لبدء النشاط ES	الوقت المتأخر لبدء النشاط LS	الوقت الفائض Slack = LS - ES = LF - EF	الوقت المبكر لانتهاه النشاط EF = ES + D	الوقت المتأخر لانتهاه النشاط LF
A	2-1	7	0	2	2	7	9
B	3-1	7	0	0	0	7	7
C	4-2	2	7	11	4	9	13
D	5-2	3	7	9	2	10	12
E	5-3	5	7	7	0	12	12
F	6-3	1	7	11	4	8	12
G	7-4	4	9	13	4	13	17
K	7-5	5	12	12	0	17	17
L	7-6	5	8	12	4	13	17

تحليل الموارد Resources Analysis :

بعد قياس الوقت الفائض في شبكة المشروع ووقت حدوثه، نبحث الآن في عملية إعادة تخطيط بعض الأنشطة من حيث وقت البداية ووقت الانتهاء بفرض وضع أفضل خطة لتشغيل الموارد، ويطلق على هذه العملية إعادة تخصيص الموارد. فالوقت الذي تم حسابه في الشبكة يعتبر الأساسي في تقدير الموارد المستخدمة، كما أن العلاقة بين هذا الوقت وتلك الموارد عادة ما تكون علاقة خطية بسيطة أي أنه كلما زادت الموارد المستخدمة

يمكن تحديد المسارات المختلفة لهذه الشبكة وهي كما في الجدول (5-14)

جدول (5-14)

المسارات	الزمن
المسار الأول = 13 (A-C-G)	7 + 2 + 4 = 13
المسار الثاني = 15 (A-D-K)	7 + 3 + 5 = 15
المسار الثالث = 17 (B-E-K)	7 + 5 + 5 = 17
المسار الرابع = 13 (B-F-L)	7 + 1 + 5 = 13

إذاً المسار الثالث (B-E-K) هو المسار الحرج لأنه يمثل أطول زمن وهو (17)

يمكن تحديد الوقت المتوقع عن طريق استخدام القانون التالي :

الوقت المتوقع (Tt) = الوقت المتفائل + 4 (الوقت الأكثر احتمالاً) + الوقت المتشاؤم ÷ 6 =

$$Tt = \frac{O+4M+P}{6}$$

مثلاً يمكن حساب الوقت المتوقع للنشاط (A)  $Tt(A) = \frac{5+4(0)+13}{6} = 7$

وهكذا يمكن حساب الوقت المتوقع لكل الأنشطة الموجودة في الشبكة البيانية وهي كما في الجدول (5-15)

جدول (5-15)

الأنشطة	A	B	C	D	E	F	G	K	L
الأحداث	1-2	3-1	4-2	5-2	5-3	6-3	7-4	7-5	5-6
الوقت المتوقع $\frac{O+4M+P}{6}$	7	7	2	3	5	1	4	5	5

بالرجوع إلى الجدول (5-13) يمكن حساب التشتت لكل الأنشطة. مثلاً الانحراف المعياري للنشاط (A) يمكن حسابه عن طريق القانون التالي :

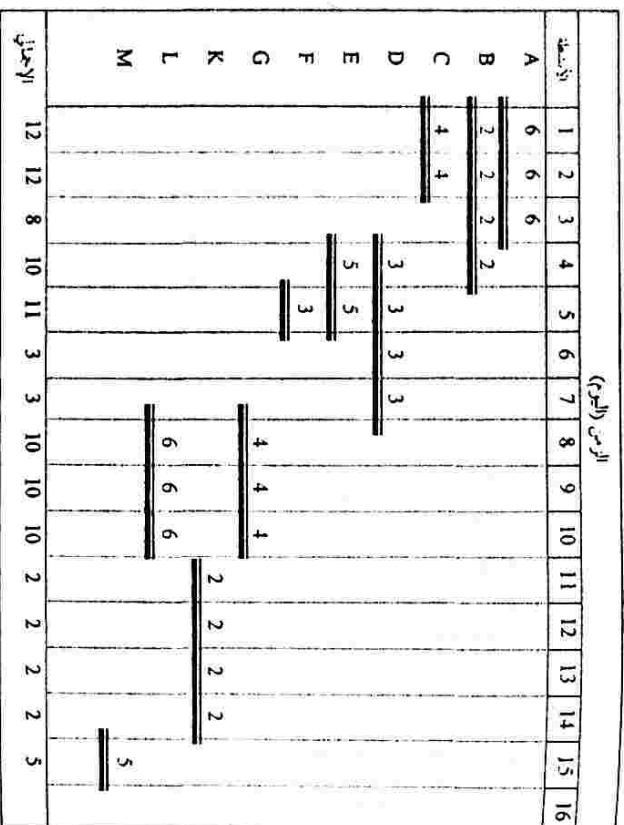
$$\sigma = \frac{13-5}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

أي أن التباين للنشاط (A) :

$$\begin{aligned} Var. &= \left(\frac{P}{6}\right)^2 = \\ &= \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \left(\frac{16}{9}\right) \end{aligned}$$

تخطيط ومراقبة المشروعات. وفي الغالب ما يتطلب تحقيق جميع معييرات هذه الطريقة عن طريق زيادة الوقت الإجمالي للمشروع في بعض الأوقات، ولكن على الأقل تتضح الصورة أمام الإدارة حول المقارنة بين زيادة الموارد حتى يتم المشروع في الوقت المقرر المخطط، أو السماح للمشروع أن يتم في وقت أطول.

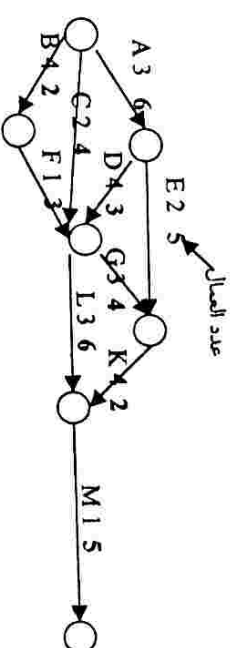
شكل (17 - 5) خريطة الأعمدة - رسم خطي للأنشطة التي تبدأ ميكراً



في نشاط ما قصر الوقت الإنجازي اللازم لهذا النشاط بغرض إتمامه. وتبدأ هذه العملية بحصر وتسجيل الموارد اللازمة لكل نشاط كما هو موضح في الشبكة البيانية في الشكل (16 - 5) (مثال رقم 9) وهي تشير للعلاقة البشرية اللازمة لمشروع بسيط.

جدول (18 - 5)

الأنشطة	أسبقية الأنشطة	الرمز	الموارد
A	-	3	6
B	-	4	2
C	-	2	4
D	A	4	3
E	A	2	5
F	B	1	3
G	DCF	3	4
K	EG	4	2
L	DCF	3	6
M	KL	1	5



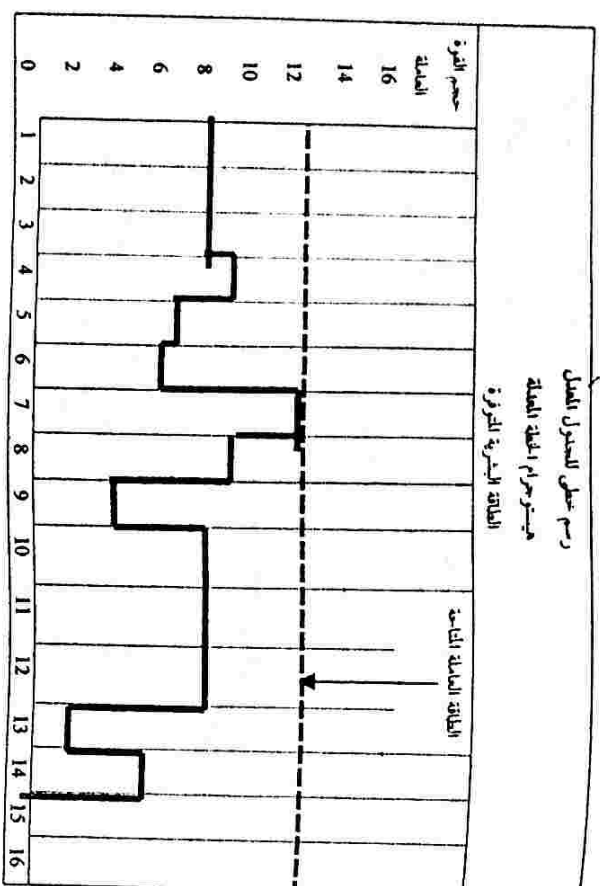
شكل (16 - 5) تسجيل الموارد على أنشطة شبكة الأفعال

وتساعد هذه الشبكة في حساب الموارد اللازمة لكل يوم من أيام المشروع كما سوف نوضح ذلك في خريطة الأعمدة (17 - 5). فتوضح المخطوط الناقصة (ب) اللون الأنشطة والمخطوط الخفيفة (ب) اللون توضح الوقت الفائض والارقام فوق الأنشطة توضح عدد الأفراد اللازمين.

ويعد ذلك يتم رسم هستوجرام Histogram لتحديد حدود الموارد المتاحة، ومن ثم تتمكن من الاستفادة من الوقت الفائض المتاح في شبكة المشروع. فيمكن في الواقع الاستفادة من تخفيض الموارد الراقعة على الأنشطة غير الحرجة بتعديل وقتي البدء والانتهاء في حدود مستوى الموارد المتاحة، وهذا في الحقيقة هو روح هذه الطريقة في



شكل (5 - 20)



مثال رقم (10) مشروع معين يتطلب تنفيذه إتمام سبعة أنشطة. ولقد كانت المعلومات المتعلقة بالأنشطة وأسبقيتها وعدد العاملين والمدة اللازمة لتنفيذ كل نشاط مبيئة في الجدول (5 - 19).

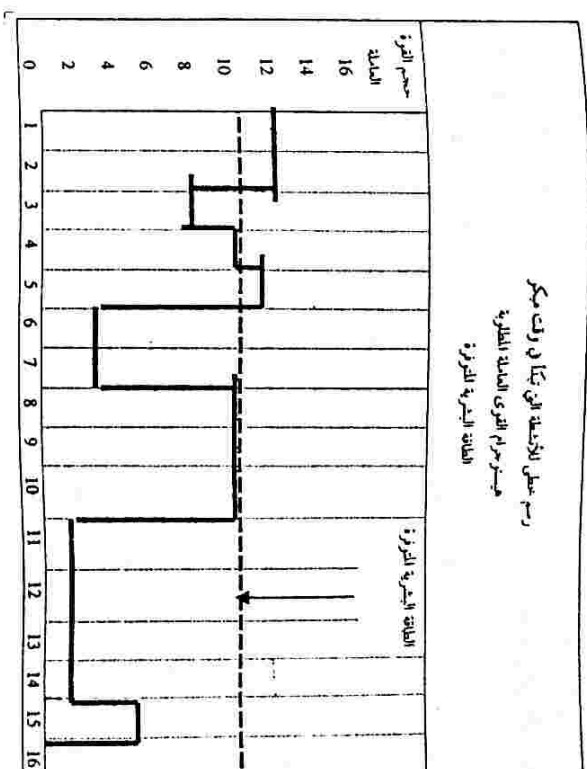
جدول (5 - 19)

الأنشطة	الأنشطة التي تسبقها	الزمن/شهر	عدد العاملين
A	-	2	2
B	-	3	3
C	A	3	1
D	A	1	4
E	B	2	3
F	C	4	5
G	DE	1	6

المطلوب:

- 1- بناء الشبكة البيانية لهذا المشروع وتحديد المسار الصحيح.

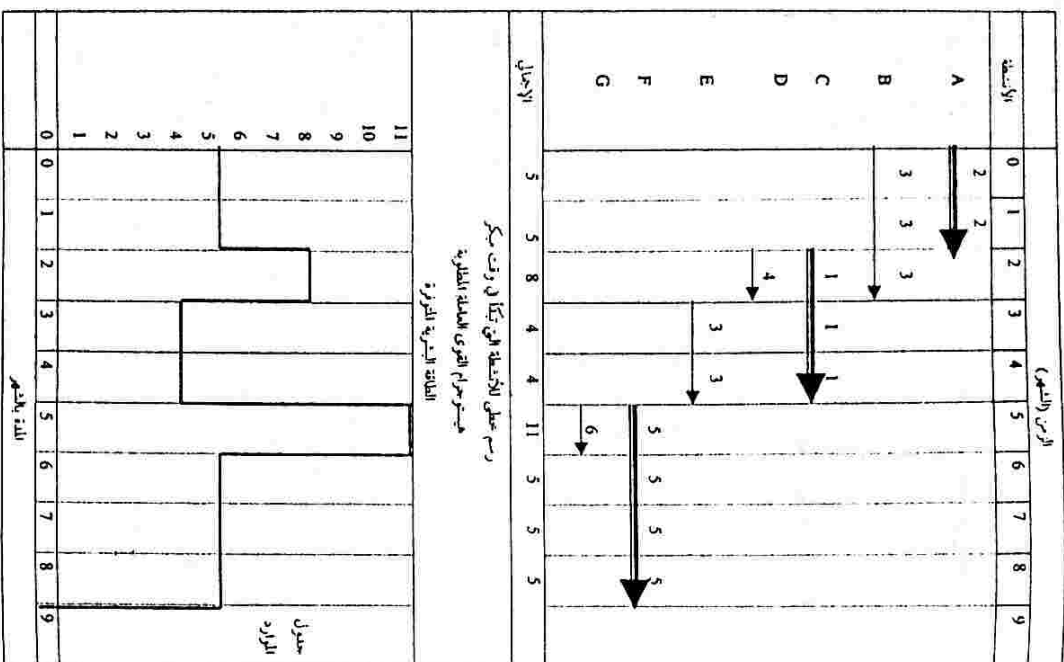
شكل (5 - 18)



شكل (5 - 19) خريطة أصدمة - رسم خطي للجدول المبدل

الأنشطة	الزمن (الأيام)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A	6	6	6	6													
B	2	2	2	2	2												
C	4			4	4												
D	3			3	3	3											
E	5					5	5										
F	3						3										
G	4							4	4	4							
K	2									2	2	2	2				
L	6										6	6	6				
M	5															5	
الإجمالي	8	8	8	8	9	7	6	12	9	4	8	8	8	2	2	5	

شكل (22 - 5) خريطة الأصعدة - رسم خطي للأنشطة التي تبدأ مبكراً



نلاحظ من الرسم السابق أن شهر (5) يمثل أعلى عدد للموارد البشرية التي يجب استخدامها في هذا المشروع (11 عاملاً). ولكن في بعض الحالات يحدد المشروع نفسه أمام ندرة الموارد البشرية. ونفترض أن العدد المتاح من العناصر البشرية في سوق العمل هو (8) فقط عن كل شهر. في ظل هذه القيود يجب على المشروع أن يقوم بعملية تحليل كل الأنشطة الموجودة في المشروع بحيث تستخدم فيها استراتيجية معينة لكل البدائل

2- حدد الوقت المبكر (ET) والوقت المتأخر (LT) للأنشطة على الشبكة البيانية.

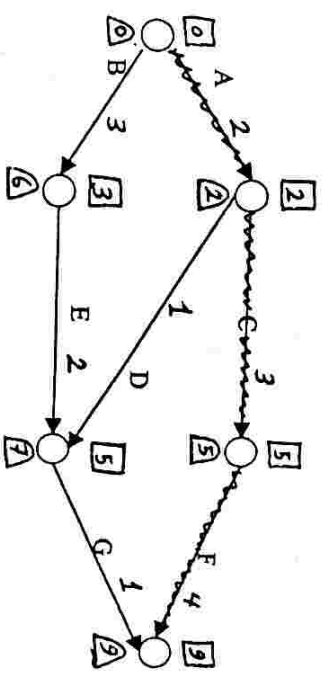
3- ارسم خريطة الوقت وجدول الموارد لهذه الشبكة.

الحل:

1- بناء الشبكة البيانية للمشروع وتحديد المسار الحرج.

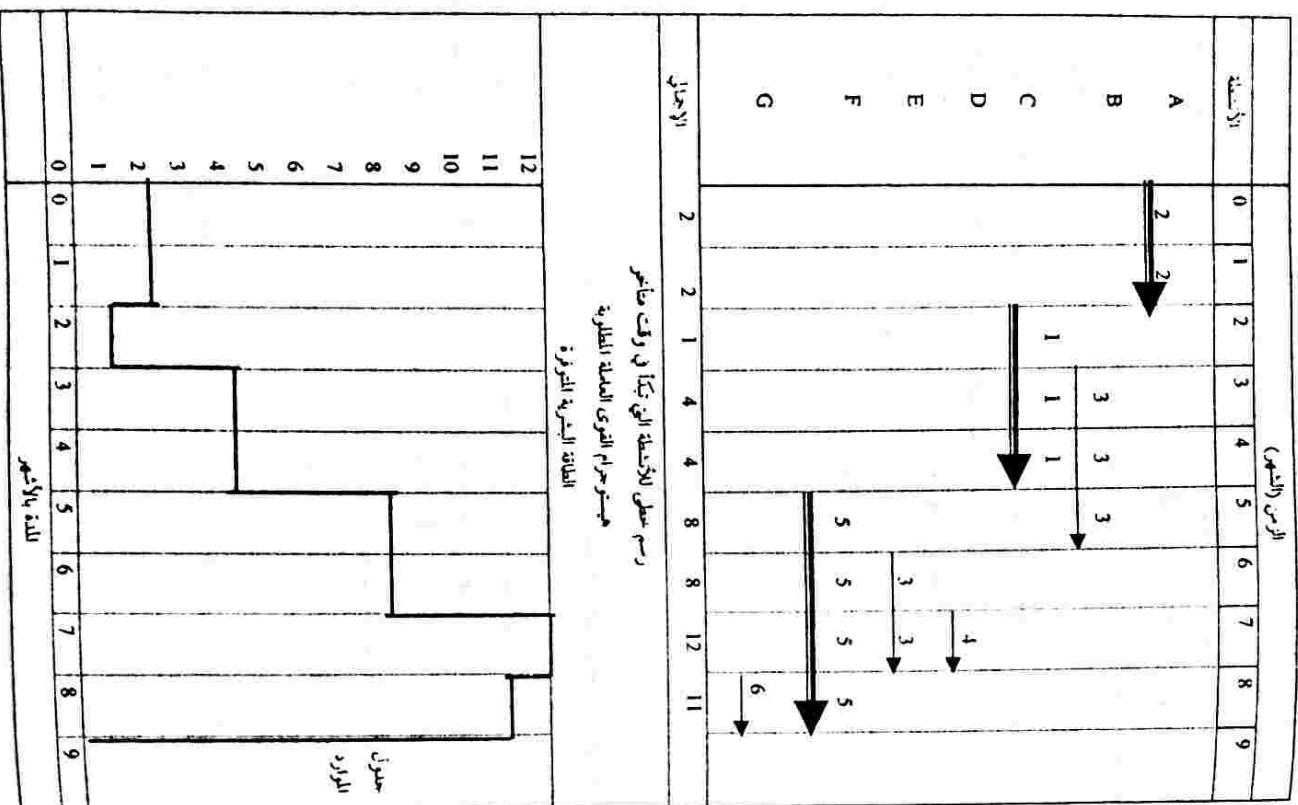
2- الوقت المبكر (ET) والوقت المتأخر (LT) للأنشطة.

شكل (21 - 5)



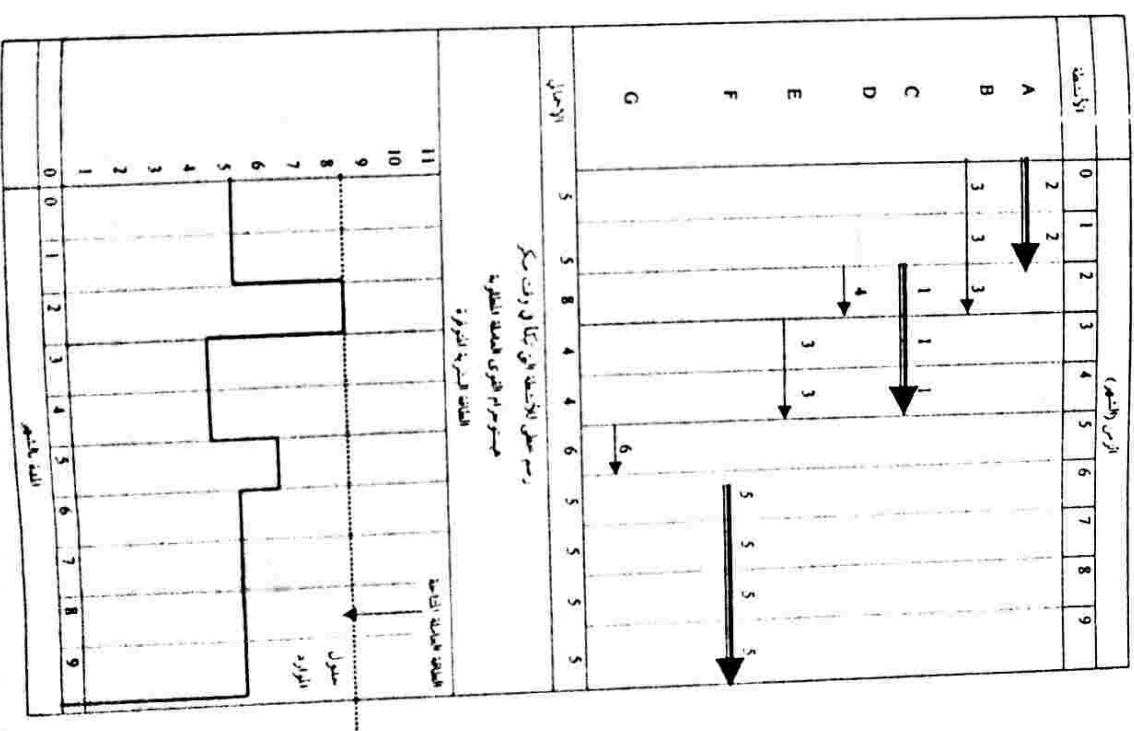
3- رسم خريطة الوقت وجدول الموارد لهذه الشبكة.

شكل (24 - 5) خريطة الأصدمة - رسم خطي للأنشطة التي تبدأ مؤخرًا



المختلفة وعن طريق عملية الزخرفة لبعض الأنشطة، فيمكن عن طريق ذلك تخفيض عدد الموارد البشرية إلى العدد المسموح بذلك. الرسم التالي يبين عملية التخفيض والزخرفة لبعض الأنشطة.

شكل (23 - 5) خريطة الأصدمة - رسم خطي للأنشطة التي تبدأ مبكرًا



### مشكلة أقصر مسار (Shortest Route Problem):

تتعلق هذه المشكلة بتحديد أقصر مسار بين نقطة البداية ونقطة النهاية في الشبكة البيانية التي تتكون من العديد من الأنشطة والأحداث. ويعني في هذه الحالة بأقصر مسار، هو المسار الذي يترتب عنه أو أنه يحقق أقل زمن تنفيذ ممكن وأقل إمكانيات معينة، وأقل تكلفة وغيرها. بمعنى أن الهدف الأساسي لمشكلة أقصر مسار (طريق) هو الوصول إلى أقل تكلفة معينة (التقليل) وليس التعظيم. ويمكن توضيح طبيعة هذه المشكلة عن طريق المثال رقم (11).

مثال رقم (11): نفرض أن مشروعاً معيناً يقوم بإنتاج سلعة معينة، وأن هذه السلعة يتم إنتاجها بواسطة آلة. ولقد كانت التنبؤات المتعلقة بسعر هذه الآلة وهي جديدة، وسعر إعادة بيعها كنسبة من ثمن شرائها، وتكاليف تشغيلها في السنة، وذلك خلال الخمس سنوات القادمة وهي مبنية في الجدول (5-20).

جدول (5-20)

السنة	1	2	3	4	5
سعر شراء الآلة	4000	4000	5000	5000	5000
سعر إعادة البيع كنسبة من ثمن الشراء	80%	70%	60%	45%	35%
تكاليف التشغيل السنوية للآلة	600	1000	1500	2400	3000

ونفترض أن مدير هذا المشروع يرغب في وضع خطة خمسية للطريقة التي سيتبناها في شراء واستبدال وتشغيل هذه الآلة، وأن مجموع التكاليف التي سوف يتكبدها المشروع من جراء هذه العمليات أقل ما يمكن. ولكن من خلال المعلومات السابقة لا يمكن حل هذه المشكلة حسب إجراءات تحليل الشبكات. بينما يمكن إجراء عمليات التحليل وحلها بواسطة مشكلة أقصر مسار. ولكن هنا يستلزم حساب الآتي:

- التكاليف المترتبة عن كل بدائل الشراء خلال الخمس سنوات القادمة.
- تكاليف إعادة البيع والتشغيل خلال الخمس سنوات القادمة.

ولم نفرض أن السنوات الخمس القادمة هي السنوات (2002، 2003، 2004، 2005، 2006)، إذاً في هذه الحالة يمكن إجراء بعض الحسابات والتي هي مبنية في الجدول (5-21).

التكلفة المترتبة عن هذا الإجراء = الخسارة المترتبة عن عملية بيع الآلة بعد تشغيلها لمدة عام<sup>+</sup>  
تكاليف تشغيل الآلة خلال سنة 2002

جدول (5-21)

تاريخ الآلة	بيع الآلة	المبيعات الحاصية	التكلفة المترتبة عن هذا الإجراء
2002\1\1	2002\12\31	$20\% \times 4000 + 600$	1400 دينار
2002\1\1	2003\12\31	$30\% \times 4000 + 600 + 1000 =$	2800 دينار
2002\1\1	2004\12\31	$40\% \times 4000 + 600 + 1000 + 1500 =$	4700 دينار
2002\1\1	2005\12\31	$55\% \times 4000 + 600 + 1000 + 1500 + 2400 =$	7700 دينار
2002\1\1	2006\12\31	$65\% \times 4000 + 600 + 1000 + 1500 + 2400 + 3000 =$	11100 دينار
2003\1\1	2003\12\31	$20\% \times 4000 + 600 =$	1400 دينار
2003\1\1	2004\12\31	$30\% \times 4000 + 600 + 1000$	2800 دينار
2003\1\1	2005\12\31	$40\% \times 4000 + 600 + 1000 + 1500 =$	4700 دينار
2003\1\1	2006\12\31	$55\% \times 4000 + 600 + 1000 + 1500 + 2400 =$	7700 دينار
2004\1\1	2004\12\31	$20\% \times 5000 + 600 =$	1600 دينار
2004\1\1	2005\12\31	$30\% \times 5000 + 600 + 1000 =$	3100 دينار
2004\1\1	2006\12\31	$40\% \times 5000 + 600 + 1000 + 1500$	5100 دينار
2005\1\1	2005\12\31	$20\% \times 5000 + 600 =$	1600 دينار
2005\1\1	2006\12\31	$30\% \times 5000 + 600 + 1000$	3100 دينار
2006\1\1	2006\12\31	$20\% \times 5000 + 600 =$	1600 دينار

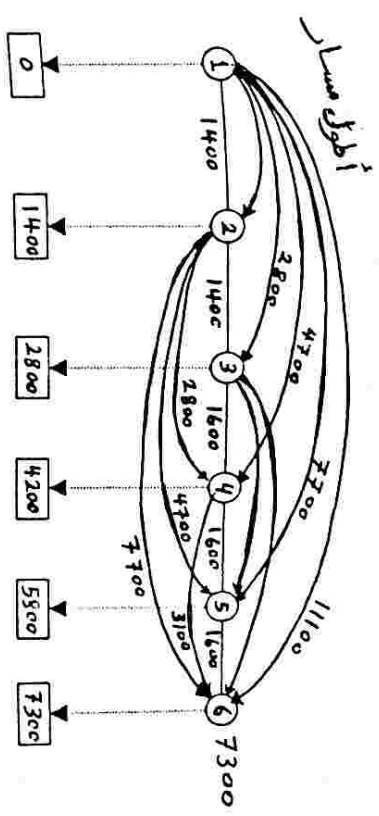
بعد حساب التكاليف، يمكن الآن تفريغ هذه البدائل المختلفة وتلخيصها في الجدول (5-22).

جدول (5-22)

السنوات	2002	2003	2004	2005	2006
2002	1400	2800	4700	7700	11100
2003	-	1400	2800	4700	7700
2004	-	-	1600	3100	5100
2005	-	-	-	1600	3100
2006	-	-	-	-	1600

من خلال الجدول (5-22)، الآن يمكن رسم الشبكة البيانية الممثلة لهذه البدائل.

شكل (5-25) شبكة البدائل



من خلال الشكل (5-25)، نجد أن أقصر مسار، هو المسار (1-2-4-6)، ويكون مجموع التكاليف في هذا المسار يمثل أقل تكلفة ممكنة بينما الخطة التي يجب اتباعها كالآتي:

1- شراء الآلة في 2002/1/1 وتشغيلها خلال تلك السنة. ثم بيعها في نهاية نفس السنة.

2- شراء الآلة في 2003/1/1، وتشغيلها خلال عامي 2003، 2004، ثم بيعها في نهاية 2004.

3- شراء الآلة في 2005/1/1، وتشغيلها خلال سنة 2005، 2006، ثم بيعها في نهاية 2006.

وسوف تكون التكاليف المتعلقة على هذه الخطة = 7300 دينار، وهي أقل تكلفة ممكنة.

مشكلة أطول مسار (Longest Route Problem):

كما لاحظنا في المشكلة السابقة بأن الهدف كان هو التقليل (البحث عن أقل تكلفة ممكنة)، بينما في هذه الحالة يكون الهدف الأساسي هو البحث عن أعلى ربح ممكن (التمتعيم). فيكون أطول مسار هو المسار أو الخطة التي تعظم الهدف، الذي يسمى المشروع إلى تحقيقه. فلا يوجد فرق بين هذه الطريقة والطريقة السابقة في الإجراءات، ما عدا في عملية اختيار أطول مسار بدلاً من المسار القصير، الذي اخترناه من قبل. ويمكن توضيح ذلك عن طريق المثال رقم (12).

مثال رقم (12): قام مصنع صغير بشراء آلة معينة وذلك لغرض تأجيرها، ولقد كانت تكلفة شرائها، والخسارة المترتبة عن بيعها، والعائد من التأجير في السنة، وذلك خلال السنوات الخمس القادمة مينة في الجدول (5-23).

جدول (5-23)

السنة	1	2	3	4	5
سعر شراء الآلة	300	330	350	370	400
الخسارة كنسبة من ثمن الشراء	10%	20%	30%	50%	70%
العائد من التأجير في السنة	70	75	85	90	110

المطلوب: تحديد الاستراتيجية التي يجب على إدارة المصنع اتباعها في شراء وبيع وتأجير هذه الآلة لمشروع يفكر في شرائها، مما يجعل أرباحه أكبر ما يمكن، مع استخدام مشكلة أطول مسار في الحل.

الحل:

نتبع نفس الإجراءات التي اتبعناها في المثال السابق (21-5)، ولكن الآن يجب إيجاد الأرباح المترتبة عن كل بدائل الشراء والتأجير والبيع، خلال الخمس سنوات القادمة (2002، 2003، 2004، 2005، 2006). إجراءات الحسابات المختلفة لهذه المشكلة مينة في الجدول (24-5).

الأرباح الصافية المترتبة عن هذا الإجراء = الربح من التأجير - الخسارة المترتبة عن بيع الآلة

جدول (5-24)

الأرباح الصافية المترتبة من هذا الإجراء	المعاملات الحسابية	بيع الآلة	شراء الآلة
40 ديناراً	$70 - 10\% \times 300 =$	2002\12\31	2002\1\1
85 ديناراً	$(70 + 75) - 20\% \times 300 =$	2002\12\31	2002\1\1
140 ديناراً	$(70 + 75 + 85) - 30\% \times 300 =$	2004\12\31	2002\1\1
170 ديناراً	$(70 + 75 + 85 + 90) - 50\% \times 300 =$	2005\12\31	2002\1\1
220 ديناراً	$(70 + 75 + 85 + 90 + 110) - 70\% \times 300 =$	2006\12\31	2002\1\1
37 ديناراً	$70 - 10\% \times 330 =$	2003\12\31	2003\1\1
79 ديناراً	$(70 + 75) - 20\% \times 330 =$	2004\12\31	2003\1\1
131 ديناراً	$(70 + 75 + 85) - 30\% \times 330 =$	2005\12\31	2003\1\1
155 ديناراً	$(70 + 75 + 85 + 90) - 50\% \times 330 =$	2006\12\31	2003\1\1
35 ديناراً	$70 - 10\% \times 350 =$	2004\12\31	2004\1\1
75 ديناراً	$(70 + 75) - 20\% \times 350 =$	2005\12\31	2004\1\1
125 ديناراً	$(70 + 75 + 85) - 30\% \times 350 =$	2006\12\31	2004\1\1

من خلال الشكل (26-5)، نجد أن أطول مسار هو المسار (1-5)، وهذا المسار يعني أن المصنع الذي يفكر في شراء هذه الآلة يجب أن يشترها في 2002/1/1، ويؤجرها لمدة خمس سنوات متتالية، ثم يبيعها في 2006/12/31، وهذه الخطة تحقق أكبر عائد ممكن، وهو 220 ديناراً.

### مسئلة وتعارين Questions and Exercises:

أسئلة:

- س1- عرف تحليل الشبكات. وما هي مزاياها عند تطبيقها في عملية التحليل؟
- س2- ما هي القواعد والشروط الأساسية التي يجب مراعاتها عند بناء شبكة المشروع؟
- س3- تحدث واثريج وعرف كل ما أمكن ذلك وباستخدام الأسلوب العلمي:
  - أ- النشاط.
  - ب- النشاط الرهوي.
  - ج- الحدث.
  - د- الشبكة البيانية.
- س4- حدد الخطوات الأساسية التي يجب اتباعها لتحديد المسار الحرج على شبكة المشروع.
- س5- أكتب مذكرات مختصرة عن الطرق التالية:
  - أ- طريقة بيرت أو أسلوب وتقييم ومراجعة البرامج (PERT).
  - ب- طريقة المسار الحرج (CPU).
- س6- تحدث واثريج عن نموذج أطول وأقصر مسار. وما هو الفرق بينهما؟

تعارين Exercises:

س1- يتطلب مشروع لإتمام تنفيذ سبعة أنشطة وذلك بالترتيب التالي: (ج تلي أ)، (هـ تلي ب)، (و تلي ج)، (ع تلي هـ، د) وقد كانت المعلومات المتعلقة بالفترة الزمنية والفترة العامة التي يحتاجها كل نشاط مينة كالآتي:

الأنشطة	أ	ب	ج	د	هـ	و	ع
الزمن/شهر	2	5	3	2	4	1	3
عدد العاملين	2	3	1	1	2	4	2

المطلوب: بناء الشبكة البيانية للمشروع وتحديد المسار الحرج ثم تحديد جدول

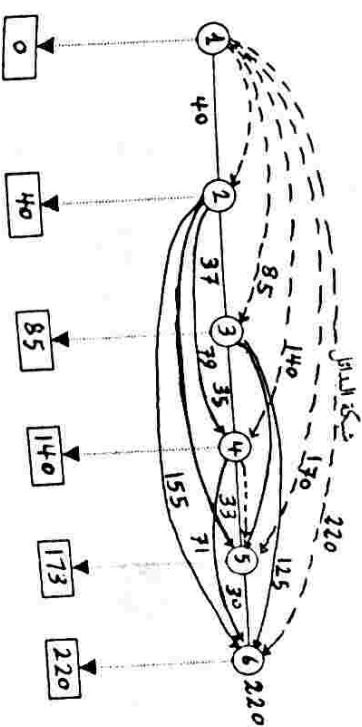
الأرباح الصافية المربوية	المبيعات الحسابية	بيع الآلة	شراء الآلة
من هذا الإجراء			
33 ديناراً	$70 - 10\% \times 370 =$	2005\12\31	2005\1\1
71 ديناراً	$(70 + 75) - 20\% \times 370 =$	2006\12\31	2005\1\1
30 ديناراً	$70 - 10\% \times 400 =$	2006\12\31	2006\1\1

بعد حساب الأرباح، يمكن الآن تفريغ هذه البدائل المختلفة وتلخيصها في الجدول (5-25)

جدول (5-25)

السنوات	2002	2003	2004	2005	2006
2002	40	85	140	170	220
2003	-	37	79	131	155
2004	-	-	35	75	125
2005	-	-	-	33	71
2006	-	-	-	-	30

من خلال الجدول (5-25)، الآن يمكن رسم الشبكة البيانية الممثلة لهذه البدائل. شكل (5-26) شبكة البدائل





## الفصل السادس

### نماذج المخزون

#### Inventory Models

#### المقدمة Introduction:

مراقبة المخزون من أهم المشاكل التي تواجه الإدارة الحديثة في كل المشروعات الإنتاجية أو في مجال الخدمات، وكل إدارة من إدارات المشروعات تنظر إليه من وجهة نظر مختلفة. وكذلك نجد أن مفهوم كلمة مخزون لها معاني أو تفسيرات مختلفة، فالبعض يعني بأن المخزون هو عبارة عن المواد الأولية فقط التي تدخل في العمليات الصناعية لإنتاج سلعة معينة، ولكن في الواقع أن كلمة المخزون تعني أكثر من ذلك؛ فهي تعني المواد الأولية والسلع نصف المصنعة، والسلع التامة الصنع، وقطع الغيار. وكذلك نجد بأن المخزون لا يقتصر فقط بالمشروعات الصناعية والتجارية، بل هو موجود أيضاً في المشروعات الخدمية، مثل الجامعات والفنادق والمستشفيات التي نجد عادة أنها تحتفظ بنسبة عالية من المخزون السليكي لكي تخدم بها الزبائن.

فنجد مثلاً أن إدارة المبيعات، تعمل على زيادة المخزون حيث يعمل لها كصمام أمن ضد تأخير توريد طلبات العملاء ولمقابلة أية زيادة في الطلب. بينما نجد إدارة المشتريات تعمل على زيادة المخزون حيث يعمل لها كضمان ضد تقلب الأسعار وساعداً على الحصول على خصم الكمية والشراء بشروط أحسن. وإدارة العمليات الإنتاجية، تعمل على زيادة المخزون حتى يكون هناك ضمان دائم ضد اختفاء المواد من الأسواق وعدم تعطيل الماكينات. وأخيراً نجد أن الإدارة المالية تقف ضد الإدارات السابقة؛ فهي تعمل على الحد من المخزون لأقصى حد ممكن لأنها تعتبر المخزون كجزء من رأس المال في المخازن مما يعطل دورة رأس المال العامل. فالمشروع يواجه مشكلتين الأولى تتمثل في طلب كميات كبيرة لتخفيض تكاليف الطلب، والثانية تتمثل في طلب كميات صغيرة لتخفيض تكاليف التخزين. وأي من هاتين المشكلتين سيكون له أثره السيء على الأرباح، والاتجاه الأمثل هو الحل الوسط بين هاتين المشكلتين.

الموارد وحساب الوقت الفائق. ما هو أكبر وأقل عدد من العاملين يجب توافرهم لإنجاز المشروع ككل؟

2- مشروع صغير مكون من سبعة أنشطة فكر فيه القائمون على تخطيطه باستخدام أسلوب فيرت، وكانت البيانات كالآتي:

الحدث	الوقت الفعلي	الوقت الأكثر احتمالاً	الوقت المتعالم
2-1	1	1	7
3-1	1	4	7
4-1	2	2	8
5-2	1	1	1
5-3	2	5	14
6-4	3	6	8
6-5	3	6	15

#### المطلوب:

- 1- بناء شبكة المشروع.
- 2- حدد المسار الحرج وأوجد الزمن الذي يستغرقه المشروع.
- 3- احسب النشبت والأحرف المعياري الكلي للمشروع.
- 3- يتطلب مشروع إنتاج أجهزة الحاسب الآلي القيام بالأنشطة الآتية:

النشاط	الوصف	الزمن اللازم بالأسبوع	الأنشطة السابقة
A	دراسة الجدوى الاقتصادية	4	-
B	وضع التصميم الهندسي والأشكال المقترحة	3	A
C	شراء المكونات	4	A
D	توزيع الأيدي العاملة	8	B, C
E	تنظيم خطوط الإنتاج	4	C
F	تدريب فنيين	6	D
G	توزيع المستندات الثانوية للإنتاج	3	E
H	الإنتاج النهائي والاستلام	7	G, F

- المطلوب: 1- بناء شبكة المشروع وتحديد المسار الحرج.
- 2- تحديد الوقت المبكر والمتأخر للنشبة.
- 3- تحديد الوقت الفائق لكل الأنشطة.

لا الدائمة أدت إلى ارتفاع مستويات المخزون وأصبحت تكلفة التخزين المتغيرة تمثل نسبة لا يستهان بها في رأس المال المستثمر في المخزون. إضافة إلى ارتفاع التكاليف الثابتة كنتيجة لارتفاع مستويات المخزون. ومن بين هذه المشاكل التي تعاني منها هذه المشروعات والمتعلقة في الآتي:

- 1- وجود تراكب في المخزون من المواد اللازمة للإنتاج.
- 2- وجود حالات نقص في بعض أنواع المواد اللازمة للإنتاج.

#### **طبيعة المخزون وأنواعه Natural and Types of Inventory:**

تتضمن طبيعة الصناعة أو الإنتاج في مختلف المشروعات سواء كانت عامة أو خاصة، كبيرة أو صغيرة، متخصصة أو متنوعة الأنشطة، ضرورة القيام بتخزين كميات من الأجزاء والمواد والمهمات والأدوات وخلافه ولو لفترة وجيزة. وذلك بهدف مواجهة متغيرات وظروف الإنتاج المتغيرة والتي تسم بالحركة وفقاً لمتغيرات ومؤثرات البيئة الداخلية والخارجية للمشروع. ولهذا لا يمكن أن نتوقع انتظام واستقرار عمليات الشراء والتوريد والنقل بالكمية والوعية المناسبة وفي الوقت المناسب والذي يحد جهات الاستخدام بحاجاتها لتحقيق برامجها المخططة. وهو ما يعني بدوره صعوبة الالتزام بتلبية احتياجات ومتطلبات عمليات الإنتاج أو الأفراد أو العملاء وبالتالي التأثير على استمرار المشروع ونتائج أعماله وربحيته ونجاحه. ولعل هذا ما يبرر ضرورة الاهتمام بوظيفة التخزين.

#### **أهمية المخزون ودواعي الاحتفاظ به Importance of Inventory and the Reasons of Storage:**

##### **أولاً - المقصود بوظيفة التخزين:**

ترتبط وظيفة التخزين ارتباطاً كاملاً بوظيفة الشراء، فنجد أن كل وظيفة تكمل الأخرى؛ حيث تعتبر وظيفة التخزين مرحلة لا يمكن إغفال أهميتها في توفير وتدير المواد والسلع اللازمة لاحتياجات العمل والإنتاج بالمشروع. وللتخزين أسسه العلمية وفي نفس الوقت يعتبر عملية فنية تعمل على مواجهة الحاجات الفعلية لجهات الاستخدام بالموجودات في المخازن واحكام الرقابة على استخدام هذه الموجودات.

وتعتبر وظيفة التخزين وظيفة جوهرية تتعلق باستلام المواد والأصناف المختلفة ثم تصنيف وتبويب وتخطيط هذه الأصناف، يلي ذلك عمليات الصروف وفقاً لإجراءات تتفق وأهداف وظيفية تنظيم المشروع مع تخطيط وتنظيم عمليات استلام المواد والمستلزمات والاحتفاظ بالمخزون في حالة صلاحة للاستخدام بما يخدم الوظائف الإنتاجية ويحقق نوعاً

وبناء على ما سبق ذكره، نجد أن المخزون هو من أهم عناصر أو بنود الأصول المتداولة، ويعتبر المخزون (مواد أولية، أو تامة الصنع، قطع الغيار، الخ) من الأصول المتداولة التي يفتق عليها المشروع أموالاً ضخمة، وفي كثير من السياسات وجد أن ما يفتق على السلع يفوق 40% من مجموع تكاليف الإنتاج. ونتيجة لكل ذلك يجب أن تعالج مشكلة المخزون باستخدام أساليب علمية ولا تترك للتقدير الشخصي لرؤساء الإدارات. ولقد ساهمت العديد من العلوم في حل المشاكل المتعلقة بالمخزون ومن بينها علم بحوث العمليات، التي بدورها وفرت العديد من الطرق الإحصائية والنماذج الرياضية وذلك للوصول إلى الحلول المثلى لمشاكل المخزون.

إن أي نظام إنتاج في أي مشروع صناعي أو إنتاجي يتكون من ثلاثة عناصر أساسية تشمل في الآتي:

- 1- المدخلات (INPUTS) التي تأخذ عادة شكل المواد في الإنتاج بكل صورها، مواد خام، مواد نصف مصنعة، مواد جاهزة للتجميع بالإضافة إلى القوى العاملة والمعدات والمعلومات.
- 2- العمليات (Transformations) التي تقوم بها إدارة العمليات الإنتاجية من أجل تحويل المدخلات إلى مخرجات.
- 3- المخرجات (Outputs) وهي نتائج عملية معالجة المدخلات وتكون سلعاً أو خدمات.

إن أي إدارة صناعية كفاءة تعمل على تحقيق أهداف المجدلة الإنتاجية بأقل تكلفة ممكنة. ونجد أن الجزء الأكبر من هذه التكاليف يكمن في المدخلات وأنها تساهم مساهمة واضحة في التأثير على التكلفة النهائية. ومن هذا المطلق برزت أهمية وضع نظام رقابي على عناصر المدخلات، وتكلفتها وأن تخفيض هذه التكاليف سوف يساهم في تحسين ربحية المشروع. إلا أن بعض الصناعات تعاني من ارتفاع نسبة تكلفة المواد الداخلة في الإنتاج نظراً لتعدد مصادر هذه المواد؛ فقي بعض المشروعات نجد أن المواد الداخلة في عملية الإنتاج تنقسم إلى قسمين:

- 1- مواد مستوردة من الخارج وترتفع تكلفة هذه المواد.
- 2- مواد محلية تكلفتها منخفضة مقارنة بالمواد المستوردة بالإضافة إلى ارتفاع نسبة المواد الداخلة في عملية الإنتاج بهذه المشروعات تتطلب الاحتفاظ بنسبة معينة من مستلزمات الإنتاج، وخاصة من المواد المستوردة. إلا أن نسبة الاحتفاظ عادة ما تكون عالية بالنسبة إلى قيمة الإنتاج خاصة أن هذه المشروعات تعتمد سياسة الاحتفاظ بجزء من احتياجات العملية الإنتاجية كمستلزمات إنتاج.

وقد أدت هذه السياسة الدائمة إلى ارتفاع تكاليف المدخلات وأن هذه السياسة

تم التركيز على المخزون الصناعي فقط أي الأجزاء التي تنتظر التجميع مع بعضها لإنتاج الوحدة النهائية، وتم إهمال الوحدات النائمة الصنع والجاهزة للشحن أو البيع وكذلك مواد الصيانة والمهمات.

كما تم تعريف المخزون على أنه البضائع والمواد التي يمتلكها المشروع بفرض إعادة بيعها أو استخدامها في صنع منتجات للبيع، وهناك من يرى أن كلمة المخزون تمثل مجموع العناصر الملموسة والمملوكة للوحدة الاقتصادية التي تكون في شكل:

1- بضاعة معدة للبيع خلال النشاط المادي للمشروع.

2- مواد ومنتجات تحت التشغيل ما زالت في مرحلة الإنتاج حتى تصبح معدة للبيع.

3- مواد ومهمات تستهلك مباشرة في العملية الصناعية.

ويرى البعض أن المخزون مصطلح يتم التعبير به عن البضائع والسلع التي يمتلكها المشروع أو المعدة للبيع أثناء الأعمال الطبيعية للمشروع. بالإضافة إلى المواد تحت التشغيل في عمليات الإنتاج أو التي يحتفظ بها لمثل هذه الغاية، وهناك من يرى أن كلمة مخزون تعني المواد الأولية والسلع نصف المصنعة والسلع التامة الصنع وقطع الغيار. كما أن المخزون لا يقتصر بالمشاريع الصناعية والتجارية فقط، بل هو موجود أيضاً في المشروعات الخدمية، مثل الجامعات والمستشفيات التي عادة ما تحتفظ بكثير من السلع لتقديم بها الخدمة لزملائها.

ويتضح من التعريفات المختلفة السابقة، عدم وجود اتفاق تام بين الباحثين على تعريف موحد متفق عليه، لأن كلا منهم ينظر إلى المخزون من زاوية معينة. إلا أن هناك بعض الأساسيات التي كانت مشتركة في أغلب التعريفات وهي:

1- المخزون شيء مادي ملموس له قيمة.

2- يحتفظ المشروع بالمخزون ولو لفترة قصيرة.

3- تكون ملكية المخزون للمشروع وله سيطرة عليه.

4- يختلف المخزون وطبيعته وفقاً لنوع النشاط الذي يزاوله المشروع.

من خلال النقاط السابقة يمكن القول بأن المخزون يمثل جميع العناصر المادية والتي تكون في شكل:

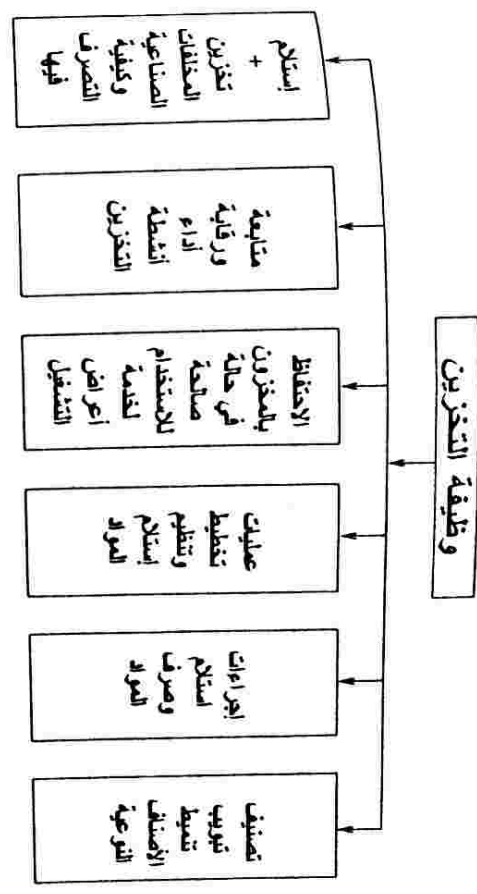
1- مواد أولية تدخل في عملية الإنتاج.

2- أجزاء أو سلع نصف مصنعة تدخل في الإنتاج أو تكون جاهزة للبيع.

3- المنتجات التامة الصنع والتي تكون جاهزة للتصرف فيها.

4- المادة المستعملة في عمليات الصيانة والتي تكون مملوكة ملكية تامة للمشروع

من التوازن بين الاحتياجات التشغيلية وبين معدلات تدفق مختلف أنواع المخامات والمعدات والأجزاء أو المستلزمات اللازمة لعمليات الإنتاج، بجانب المتابعة والرقابة على الأداء بما يحقق كفاءة الأداء وتخفيض التكاليف. كما تمتد وظيفة التخزين لتشمل استلام وتخزين المخلفات الصناعية وكيفية التصرف فيها. الجدول (1-6) يبين أهداف وظيفة التخزين.



جدول (1-6) أهداف وظيفة التخزين

ثانياً - مفهوم التخزين Inventory Concept :

لقد قام العديد من المتخصصين في علم الإدارة والمحاسبة بتعريف المخزون؛ فزاي البعض أن المخزون يعبر عن أية كمية من المواد (خدمات أو أجزاء أو منتجات تحت التشغيل أو منتجات نامّة) تحت سيطرة مشروع ما يحتفظ بها لفترة زمنية معينة في حالة سائلة نسبياً انتظاراً لاستخدام أو بيعها. ويوضح هذا التعريف أن فكرة الاحتفاظ بالمخزون تعتبر انكساراً لحالة سكون بين نشاط سابق ونشاط لاحق يمثل أولهما عملية تكوين والآخرى عملية طلب على المواد، ولا يظهر المخزون إلا إذا زاد مجموع عمليات التزوين عن مجموع عمليات الطلب حيث تغير معدلات التزوين بمقايه مدخلات نظام المخزون، أما معدلات الطلب فتغير عن مخرجات هذا النظام.

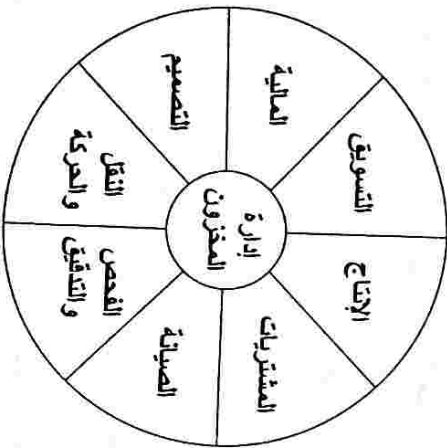
وهناك من عرف المخزون بأنه مجموعة من المواد والأجزاء المكتملة الأخرى للمنتج النهائي والتي تتضمن المجاميع شبه النهائية للوحدات المصنعة والمخزون والتي تنتظر تجميعها مع وحدات أخرى لكي نحصل على وحدة نهائية. ويتضح من هذا التعريف أنه

6- تعتبر الموسمية سبباً للتخزين، فبعض احتياجات المشروع تتوفر في موسم معين (مثلاً المواد الزراعية) بينما يجري استخدامها في الإنتاج طوال العام الأمر الذي يتطلب تخزين احتياجات الإنتاج طوال العام. ومن ناحية أخرى قد يتم الإنتاج خلال فترة معينة أو موسم معين بينما يحتاج السوق إلى هذه المنتجات طوال العام مما يستدعي تخزين هذه المنتجات طوال العام لإمداد السوق باحتياجاته.

7- نظراً لأن المخزون أقل الأصول سيولة فإن الأخطاء المتعلقة بإدارته لا يمكن معالجتها بسرعة، وسوء الإدارة إذا زاد عن حده في هذا المجال فقد يؤدي ذلك إلى نهاية المشروع.

8- يحقق المخزون عامل الأمان بالنسبة لاستمرار عجلة الإنتاج بالمشروع في الدوران، حيث يكفل المخزون أرصدة المواد والسلع والمهمات وقطع الغيار التي تحقق هذا الأمان.

9- تزداد الأهمية النسبية في بعض المشروعات لسلع معينة تعتبر رئيسية وتدخل في معظم العمليات الإنتاجية، مثل الإسمنت في شركات المقاولات. لذا، فإن الأهمية النسبية لهذا المعنصر تبين لنا أهمية إدارة المخزون. الجدول (2-6) يبين علاقة إدارة المخزون بباقي الإدارات الأخرى بالمشروع.



جدول (2-6) علاقة إدارة المخزون بباقي الإدارات الأخرى بالمشروع

ربما - دواعي الاحتفاظ بالمخزون **Reasons of Keeping Inventory** :

المخزون يختلف من مشروع إلى آخر وذلك وفقاً لنوع النشاط الذي يقوم به المشروع، وتختلف الأسباب التي تستدعي وجوده والاحتفاظ به. ف نجد مثلاً أن التخزين

ويحتفظ المشروع بها لفترة زمنية معينة انتظاراً لحين الحاجة إليها. وحيث إن المخزون يمثل نسبة عالية من إجمالي حجم الأموال المستثمرة في المشروع، الأمر الذي يوضح الأهمية العالية لهذا المعنصر.

ثالثاً - أهمية المخزون:

تحتفظ مشروعات الأعمال بمواد مختلفة تساعد في استمرار العملية الإنتاجية بلا توقف حسب برامجها الإنتاجية المخطط لها، الأمر الذي يستدعي وجود مخزون. وتظهر أهمية هذا المخزون في كونه يمثل حلقة الوصل بين طلبات العملاء ومنتجات المشروع، كما تظهر أهمية المخزون في كونه يمثل أهم الأصول في أغلب المشروعات حيث يكون الجزء الأكبر من الأصول المتداولة وأيضاً مجموع الأصول، كما يحقق المخزون مجموعة من المنافع للمشروع يمكنه من المنافسة بجانب تحقيق معدلات ملموسة من النمو والاستقرار والنجاح نظراً لتوفيرها لمختلف الاحتياجات والمتطلبات من المواد والمهمات والأجزاء والأدوات وغيرها وفقاً لمعدلات الاستخدام. ويمكن بيان أهمية المخزون في النقاط التالية:

1- يمثل المخزون نسبة مرتفعة من إجمالي حجم الأموال المستثمرة في المشروع قد تصل في المشروعات الصناعية إلى ما يزيد عن 50% وفي المشروعات التجارية يتراوح ما بين 52% إلى 75% من إجمالي حجم رؤوس الأموال المتاحة.

2- نظراً للحجم الكبير الذي يشغله المخزون من إجمالي حجم الأموال المستثمرة، فإنه يؤثر على اقتصاديات المشروع حيث تمثل تكلفة الاحتفاظ بالمخزون نسباً مرتفعة لا يستهان بها.

3- تستطيع مختلف الإدارات بالمشروع القيام بأعمالها ورسم خططها ووضع برامجها عندما تتوفر سياسة تخزينية واضحة وسليلة ومعدة على أسس علمية، حيث يعمل نشاط التخزين على تحقيق التنسيق والتكامل بين مختلف إدارات المشروع.

4- عندما تكون هناك سياسة واضحة للمخزون مبنية على أسس علمية فإن هذا من شأنه تخفيض حجم الاستثمارات في موجودات المخازن إلى الحد الذي يسمح باستمرار العملية الإنتاجية، ولا يكون هناك فائض في المخزون أي تحقيق التوازن بين متطلبات العملية الإنتاجية وبين ما هو موجود بالمخازن.

5- نظراً لارتباط إدارة المخزون بمختلف الإدارات الأخرى الموجودة في نفس المشروع، فإن حجم المخزون وارتفاع تكاليف الاحتفاظ به يؤثر على إجمالي التكاليف الكلية للإنتاج، وبالتالي، على تكلفة السلع المزيج تسويقها لعملاء المشروع وبالتالي على أسعارها النهائية، الأمر الذي يؤثر على استمرار الاحتفاظ بعملاء المشروع وقطاعاته التسويقية.

وبالتالي، وفي مثل هذا الوضع غير المثالي الذي يعجز الواقع العملي، سوف يستهدف الاحتفاظ بالمخزون داخل النظام الإنتاجي امتصاص التغيرات بين معدلات الطلب ومعدلات التوريد في كافة مراحل العملية التحويلية. وفي إطار ظروف الواقع العملي التي تتميز بحتمة توقع الانحرافات بين معدلات الطلب ومعدلات التوريد فإنه يمكن تحديد الأسباب التالية للاحتفاظ بالمخزون:

1- يتيح تواجد المخزون الوقت الكافي لشراء ونقل واستقبال العدد الغضخ المتراحم من الأصناف من الموردین وفرزه وفحصه وتسجيله قبل أن يصبح جاهزاً وصالحاً ومضموناً للتسليم للإنتاج بمقوماته الصحيحة مما يؤدي لتعادي خسائر العطل، فالأجور والمصروفات والربح وثقة العملاء والروح المعنوية للعمال وسعة الوحدة الإنتاجية.

2- يوفر المخزون الحماية ضد ارتفاع معدلات الطلب الفعلية عن معدلاتها المتوسطة، ويعني هذا ضمان الوفاء بالطلب في أغلب الأحيان سواء كان هذا الطلب خاصاً بالعملية الإنتاجية أو كان طلب العملاء.

3- الحماية ضد مخاطر زيادة طول فترات التوريد عن متوسطاتها. ويعني ذلك استمرار الوفاء بالطلب بأنواعه المختلفة في أغلب الأحيان في حالة تأخر التوريد عن الموعد المحدد له.

4- موسمية توافر المواد الخام أو السلفة. فقد يكون إنتاج المادة الخام موسمياً بشكل يتعذر معه الحصول على كل ما يلزمنا لجداول الإنتاج الزمنية بوقت مناسب وذلك مثل إنتاج الأقطان اللازمة لعملية الغزل والنسيج.

5- الاستفادة من خصم الكمية للخامات والأجزاء المشتراة. فقد يكون من الأفضل شراء الخامات والأجزاء بكميات أكبر من الاحتياجات المتوقعة منها وتحمل تكلفة إضافية للاحتفاظ بالمخزون منها إذا كانت هذه الزيادة في التكاليف أقل من الوفرة الناتجة من خصم الكمية نتيجة الشراء بكميات كبيرة.

6- الاستفادة من التقلبات الموسمية للأسعار. فقد يكون من المفيد شراء الخامات في مواسم انخفاض أسعارها والاحتفاظ بها لحين حلول مواسم استخدامها، وذلك إذا كان الوفرة في السعر أكبر من تكلفة الاحتفاظ بالمخزون لحين استهلاكه.

7- خفض أوقات التمثل في الإنتاج بسبب نقص الخامات أو الأجزاء. ففي حالة المنتجات التي تتكون من أجزاء وتجميعات جزئية عديدة يكاد يكون من المستحيل ضمان تواجد كل منها في نفس الوقت عند الاحتياج إليها في التجميع النهائي للمنتج. في مثل هذه الحالات يستهدف الاحتفاظ بالمخزون من الأجزاء والتجميعات الجزئية ضمان استمرار عمليات التجميع النهائي دون تعطل.

في المشروع التجاري غالباً ما يشمل سلماً ومواد مرتبطة ببعضها وتسليمها في مواعيد محددة، حيث يهدف المشروع بتخزينه لهذه المواد والسلع إلى تأمين تسليمها في المواعيد المتفق عليها وتنفيذ التزاماته تجاه العملاء. كما يهدف المشروع من وراء التخزين إلى الاستفادة من تقلبات الأسعار وخصم الكمية، فنجد المشروع يشتري السلع والمواد بكميات كبيرة في فترة توافرها وبذلك يستفيد من الخصم الذي يرافق هذه الكمية الكبيرة وتكون الأسعار منخفضة. وتكون هذه السياسة مجدية عندما يكون الوفرة الذي يحققه المشروع يفوق تكاليف الاحتفاظ بالمخزون من هذه المواد إلى حين الحاجة إليها. ولأن يمكن التركيز على المخزون في النظام الإنتاجي والأسباب التي تستدعي وجوده وضرورة الاحتفاظ به. ولكن قبل استعراض أهم تلك الأسباب يجب علينا أن نطرح مجموعة من التساؤلات المتعلقة بطبيعة العملية الإنتاجية ومدخلاتها ومخرجاتها. وهذه التساؤلات هي:

1- هل الطلب على مخرجات النظام الإنتاجي معروف مقدماً بالتاكيد أم هو معروف وغير مؤكد؟

2- هل تصل الكميات المطلوبة في المواعيد المحددة لها أم أن هناك احتمالية تأخرها في أغلب الأحيان؟

3- هل بقي الموردون بالتراماتهم في تواريخ التوريد؟

4- هل معدلات الإنتاج للعمليات الصناعية في العملية التحويلية معروفة وثابتة ومؤكدّة أم لا؟

ومن خلال التساؤلات السابقة وعندما يكون الطلب على مخرجات النظام الإنتاجي معروفاً مقدماً بالتاكيد، وعندما تصل الكميات المطلوبة في التواريخ المحددة لوصولها، وعندما بقي الموردون بالتراماتهم، وعندما تكون معدلات الإنتاج للعمليات الصناعية في العملية التحويلية معروفة وثابتة ومؤكدّة، فإنه لن تكون هناك حاجة للاحتفاظ بالمخزون داخل النظام الإنتاجي، ويعتبر هذا الواقع مثالياً. إلا أنه في الواقع العملي نادراً ما تتحقق هذه الظروف المثالية المؤكدة، فنجد أن الإجابة على التساؤلات السابقة في الواقع العملي تكون كالآتي:

1- الطلب غير معروف بالتاكيد. وإنما هو متذبذب ويخضع لمجموعة من المتغيرات الأخرى.

2- إحتماية تأخر وصول الكميات المطلوبة في مواعيدها تشكل نسبة مرتفعة.

3- لا بقي الموردون في العادة بالتراماتهم وتواريخ التوريد.

4- تكون معدلات الإنتاج غير ثابتة وغير مؤكدة وإنما تنخفض هي الأخرى لمؤثرات وظروف العملية الإنتاجية.



استثمارياً، وبالتالي فإن أي مبالغ مستثمرة في مخزون يتم الاحتفاظ به يعني ضياع أو خسارة عائد الاستثمار في هذا المخزون.

3- إذا كانت المنتجات (خدمات، أجزاء، منتجات تامة) المخزنة عرضة للتلغف والتلف، فإن زيادة مستوى المخزون منها يعمل استثماراً رأسمالياً في منتجات لا يمكن استخدامها في حالة تلفها أو تقادمها. في هذه الحالة سوف تصل الخسارة إلى الفرق بين قيمة الاستثمار الأصلي في هذا المخزون وقيمه كخردة.

4- إن زيادة الاستثمار الرأسمالي في المخزون يعني بالضرورة نقص الأموال المتاحة للأغراض الأخرى في النظام الإنتاجي.

5- في حالة الاحتفاظ بمخزون كبير من مادة خام معينة، فإن أي انخفاض مفاجيء في السعر السوقي السائد لهذه المادة الخام يعني خسارة نقدية للنظام الإنتاجي نتيجة الشراء بسعر أعلى (لكن إذا ارتفع السعر فالنتيجة مكسب تقدي)، إلا أنه بصفة عامة من الأفضل الاحتفاظ بمخزون أكبر في حالة توقع التضخم ومخزون أقل في حالة توقع الانكماش.

## أنواع المخزون والتكاليف المرتبطة بها Types of Inventory and its Associated

Costs

### أولاً - الأنواع المختلفة للمخزون Different Storage Kinds :

لا يقتصر التخزين على مشروع دون مشروع آخر، فالمشروعات جميعها سواء كانت مشروعات تجارية أو صناعية أو مشروعات خدمات تهتم بالتخزين وتلجأ إليه. ويتم دراسة الأنواع المختلفة للمخزون من زاويتين:

1- أنواع المخزون في النظام الإنتاجي طبقاً لاستعمالات المواد المخزنة، وهذا ما يطلق عليه أنواع المخزون في إطار التوصيف الهيكلي.

2- أنواع المخزون في النظام الإنتاجي على أساس الوظيفة التي يؤديها المخزون، وهذا يطلق عليه أنواع المخزون في إطار التوصيف السلوكي.

1- أنواع المخزون في إطار التوصيف الهيكلي:

فلنا إن المخزون يشتمل على جميع العناصر المادية الملموسة والتي تكون في شكل:

- أ - مواد أولية
- ب - أجزاء وسلباً نصف مصنعة
- ج - منتجات تامة
- د - مواد مستعملة في عمليات الصيانة
- هـ - المخزون من المهمات.

8- نفاذ الصنف لعدم وجود المخزون الكافي منه أو بسبب عرقلة تحركه من السوق للإنتاج يؤدي للخنوع للشرط الصعبة والأسعار المرفقة للموردين.

في إطار الأسباب السابقة للاحتفاظ بالمخزون في النظام الإنتاجي، يصبح هدف مراقبة المخزون الاحتفاظ بالمستوى المناسب للمخزون الذي يحقق الأهمية لمعايير كفاءة تحددتها الإدارة، وذلك مثل تنزي إجمالي التكاليف الناتجة من الاحتفاظ بالمخزون أو تعظيم الأرباح التي يحققها النظام الإنتاجي أو تحديد حد أدنى مقبول لسرعة تلبية وخدمة طلبات العملاء. إن ضرورة الاحتفاظ بالمخزون في النظام الإنتاجي طبقاً للأسباب السابقة، ترتبط بترعين من المخاطر أو العيوب تتعلق بانخفاض مستوى المخزون عن حد أدنى معين أو ارتفاعه عن حد أعلى معين. وفي ما يلي تحليل لهذه المخاطر في حالتين:

### • مخاطر وعبوب انخفاض مستوى المخزون:

يمكن تلخيص أهم مخاطر وعبوب انخفاض مستوى المخزون عن حد معين في ما يلي:

1- زيادة احتمالات عدم الوفاء بالطلب بأنواعه المختلفة. ويمكن أن يؤدي هذا إلى خسائر مباشرة للنظام الإنتاجي في شكل ارتفاع تكلفة تعطل العمليات الصناعية، كما قد يؤدي إلى خسائر غير مباشرة نتيجة انخفاض المبيعات المستقبلية بسبب تأخر أو عدم تلبية طلبات العملاء.

2- نتيجة للمخاطر الواردة في الفقرة السابقة، غالباً ما تتبع مجموعة من إجراءات الطوارئ لمحاولة إرضاء العملاء، وذلك مثل إنتاج دفعات إنتاجية خاصة، مما يؤدي إلى اضطراب خطة الإنتاج والجدولة الزمنية.

3- في حالة انخفاض مستوى المخزون الذي يتم الاحتفاظ به، سوف يتطلب الأمر (في المتوسط) إصدار عدد أكبر من أوامر التوريد لاستكمال المخزون المسحوب، وذلك بالمقارنة مع الحالة التي يكون فيها مستوى المخزون المحفوظ به مرتفعاً. ويؤدي مثل هذا الوضع إلى ارتفاع تكاليف الطلب.

### • مخاطر وعبوب ارتفاع مستوى المخزون:

يمكن تلخيص أهم مخاطر وعبوب ارتفاع مستوى المخزون عن حد معين فيما يلي:

1- في حالة ارتفاع مستوى المخزون الذي يتم الاحتفاظ به سوف ترتفع تكاليف التخزين التي تتمثل في تكاليف الاستثمار في إمكانيات التخزين من مباني وتجهيزات مخزنة بالإضافة إلى تكاليف التلف والتلف.

2- يعتبر المخزون استثماراً عاطلاً؛ أي أن المبالغ المستثمرة في المخزون لا تدر عائداً



أساس جدولة الإنتاج بحيث تنتج الكميات اللازمة على مدار السنة بانتظام بغض النظر عن وجود ارتباط بتسليمها في الحال أو المستقبل . ونمثل المخازن حلقة الوصل بين المصنع والمعملاء، إذ أن المنتجات التامة تمر في طريق انتقالها من المصنع إلى المعملاء بالمخازن وبقي بها ولو لفترة وجيزة. إلا أنه هناك بعض الحالات الاستثنائية التي يتم فيها تسليم المنتجات التامة إلى المعملاء مباشرة من خطوط الإنتاج.

#### هـ - المخزون من المهمات :

وتتمثل هذا النوع من المخزون في المواد غير المنتجة والتي تستخدم لتدعيم استمرارية العمليات الإنتاجية ولكنها لا تدخل مباشرة في تركيب المنتج النهائي ولذلك فهي تعرف بالمواد غير المباشرة. ومن أمثلة المهمات مواد التشحيم والتزيت وقطع غيار المعدات والآلات المستخدمة في الإنتاج، ومواد وأدوات الصيانة.

تمثل الأنواع الخمسة السابقة للمخزون تقسيماً للمخزون في إطار التوصيف الهيكلي. وليس من الضروري أن تظهر كل الأنواع الخمسة في أي نظام إنتاجي ولكن يعتمد ذلك على نوع العملية الإنتاجية ونوع الإنتاج المنتج؛ ففي خطوط الإنتاج المتصلة كما في الصناعات التحليلية (مثل صناعة تكرير البترول) لا يتم فصل العمليات الإنتاجية على خط الإنتاج بأي مخزون، لأن خط الإنتاج يكون غالباً خطأ أوماتيكياً يعتمد على أجهزة تحكم آلي، وعلى النقل الآلي بين مراكز الإنتاج في الخط، وبالتالي فإن كل المواد المباشرة من خامات وأجزاء وتجميعات جزئية تعتبر مخزوناً تحت التشغيل ولا يخصص لها مخازن للاحتفاظ بها داخلها. أما في النظم الإنتاجية التي يعتمد تخطيطها الداخلي على خط الإنتاج غير المتصل كما في الصناعات التجميعية (مثل صناعة السيارات) فإنه يتم فصل العمليات الإنتاجية مادياً مما يسمح بتوفير إمكانيات للاحتفاظ بالمخزون تحت التشغيل في شكل أجزاء أو تجميعات جزئية، وبالتالي يمكن أن تظهر بوضوح كافة الأنواع المختلفة للمخزون في التقسيم السابق.

2- أنواع المخزون في إطار التوصيف السلوكي :

في إطار التوصيف السلوكي يمكن تحديد الأنواع التالية للمخزون وذلك حسب الوظيفة التي يؤديها كل نوع :

#### 1 - المخزون الاستراتيجي Strategic Inventory :

يهدف المخزون الاستراتيجي إلى مواجهة أية احتمالات طويلة الأجل تتعلق بتقص الإمداد لأي سبب من الأسباب مثل نقص الإمدادات من الخامات أو توقعات خاصة بارتفاع أسعار الخامات أو لأسباب سياسية تتعلق بأزمات محلية أو عالمية. ويعتمد تحديد مستوى المخزون الاستراتيجي الواجب الاحتفاظ به إلى حد بعيد على الخبرة الشخصية.

#### 2 - المخزون الاحتياطي (الآمان) Safety Stock :

يستهدف المخزون الاحتياطي تلبية الطلب على المخزون طوال فترة التردد، وهي

وتتمثل هذه العناصر أحد التقسيمات الأساسية للمخزون. وبالتالي فإنه يمكن تحديد الأنواع التالية وفقاً للتقسيم الهيكلي للنظام الإنتاجي.

#### 1 - المخزون من المواد الخام :

ويتمثل هذا النوع من المخزون المواد الخام المشتراة والتي يتمزتم تشكيلها أو تحويلها أو إدماجها مع مواد خام أخرى بفرض إنتاج أجزاء أو منتجات تامة المصنع. وفي أغلب الأحوال فإن المخزون من هذا النوع عبارة عن مواد أو أجزاء مصنوعة تشتري من مشاريع أخرى وذلك باستثناء المعادن المستخرجة من باطن الأرض حيث تعتبر مواد خاماً بمعناها الحقيقي، وكذلك المنتجات الزراعية. ومن أمثلة هذه المواد الخام : الصوف والقطن المستعمل في عمليات الغزل والنسيج وكذلك الألياف والزجاج والمواسير وغيرها من المواد الخام الداخلة في عمليات الإنتاج.

#### ب - المخزون من الأجزاء والتجميعات الجزئية :

تم تتم عملية الإنتاج على مراحل وقد تقتضي ظروف المشروع القيام بتخزين كميات من الأجزاء التي سيتم استخدامها في إنتاج التجميعات الجزئية أو بيعها للمعملاء كقطع غيار. ومن أمثلة هذه الأجزاء الترانزستورات والأجزاء المصنوعة من الحديد وغيرها. كما تشمل التجميعات المشتراة أو التي يتم إنتاجها من أجزاء مشتركة أو مصنعة والتي تدخل في تركيب المنتج التام، ومن أمثلة هذه التجميعات الجزئية المحركات، صناديق التروس، اللوحات الإلكترونية... الخ.

#### جـ - المخزون تحت التشغيل :

ويشمل هذا النوع من المخزون كافة المواد التي تحت التشغيل لتحويلها من مادة خام أو تجميعها إلى منتج تام ويتضمن كافة الخامات والأجزاء أو التجميعات الجزئية التي يتم الاحتفاظ بها بين العمليات الصناعية. أما الأجزاء الجزئية التي يتم تسليمها للمخازن فإنها تدخل تحت بند مخزون الأجزاء والتجميعات الجزئية، ويتوقف حجم هذا النوع من المخزون على مدى تعقد مراحل الإنتاج وطول كل مرحلة. ويلاحظ أن قيمة المخزون تحت التشغيل تكون في تزايد مستمر كلما انتقل الإنتاج من مرحلة لأخرى وذلك بسبب الاحتياجات التي تعاقب في كل مرحلة من أجزاء أو مواد أو أجزاء المعال اللازمة لإنهاء الإنتاج في كل مرحلة. ولذلك تعمل المشروعات على الإسراع بإنهاء المخزون من البضاعة تحت التشغيل أو سرعة نقله من مرحلة لأخرى حتى لا يحدث تعطيل للاستثمار، ومن جهة أخرى تحاول هذه المشروعات أيضاً الحد من نسب العادم في كل مرحلة كوسيلة لتخفيض تكلفتها أيضاً.

#### د - المخزون من المنتجات التامة المصنعة :

ويشمل هذا النوع من المخزون كل السلع التامة المصنعة أو التجميعات النهائية والتي تكون مدة لشحنها للعملاء. فمن غير المتصور أن يتم تسليم المنتجات التامة من المصنع إلى المعملاء مباشرة وفي نفس الوقت، إذ أن المخطط الإنتاجي يوضح في الغالب على

## ثانياً - التكاليف المرتبطة بالمخزون:

يمكن تقسيم تكاليف المخزون إلى الأنواع التالية:

1- تكاليف الطلب والتوريد - وهي التكاليف التي يتحملها المشروع عند كل طلبية جديدة. وتشمل هذه التكاليف الآتي:

أ- تكاليف إعداد وتحضير وتوزيع كافة المستندات المطلوبة.

ب- تكاليف النقل والتفريغ.

ج- تكاليف استلام المواد وفحصها وتسجيلها.

كما تمثل مرتبات العاملين بجهاز المشتريات الجزء الأكبر من تكاليف الطلب. كما تعتبر الأدوات الكتابية المستخدمة في عملية الطلب جزءاً من التكاليف.

2- تكاليف الإعداد - في حالة توريد الكمية المطلوبة من داخل النظام الإنتاجي بالمنتج بدلاً من الشراء من المورد فإن تكاليف الإعداد في كافة عناصر التكلفة التي تنشأ نتيجة إصدار أمر تشغيل هذه الكمية وإعداد الآلات وضبطها لإنتاج هذه الكمية.

3- تكاليف نفاد المخزون - وهي التكاليف التي تنشأ عن عدم توافر السلع والمواد في حالة الطلب عليها. ومن أمثلة هذه التكاليف، تكاليف تعطّل الآلات أو استخدام مادة بدلية أعلى في التكلفة أو تكاليف إعداد الآلات لإنتاج منتج آخر أو التكاليف الناتجة من انخفاض المبيعات. وعلى الرغم من صعوبة قياس مثل هذا النوع من التكاليف مباشرة فإن أغلب المشروعات تلجأ إلى طرق وأساليب معينة لقياس مثل هذا النوع من التكاليف كقياس الخسائر الناتجة عن فقدان عدد من المستهلكين أو فقدان جزء من دخل المبيعات الناجم عن نفاد المخزون.

4- تكاليف استمجال التوريد - وهي النفقات التي يتحملها المشروع عند الطوارئ، أي عند نفاد المخزون أو عند اقترابه من النفاذ لغرض استمجال أوامر التوريد (أوامر الشراء) لمنع توقف أو تعطّل الإنتاج. وتشمل تكاليف استمجال التوريد في كافة عناصر التكلفة التي تنشأ نتيجة هذا الاستمجال.

5- تكاليف الاحتفاظ بالمخزون - وهذه التكاليف عبارة عن جزء أو نسبة من المخزون الذي يتم الاحتفاظ به. ويتأثر أيضاً بالمدة التي يتم فيها الاحتفاظ بالمخزون. وتتضمن هذه التكاليف جميع التكاليف المباشرة وغير المباشرة المرتبطة بامتلاك المخزون والاحتفاظ به. وأهم هذه التكاليف هي تكلفة الفرصة البديلة الناتجة من استثمار الأموال في المخزون، ويمكن تكلفة الفرصة البديلة هذه معدل العائد الذي تترفع المشروعات المحصول عليه من الأموال المستثمرة في المخزون، وهناك تكاليف تدفعها المشروعات والتي تتضمن:

الوقت المنقضي بين إصدار الطلبية وبين استلامها، وقد تكون هذه الفترة محددة أو احتمالية. ويمكن تحديد ثلاث حالات يستخدم فيها المخزون الاحتياطي لمواجهة الطلب خلال فترة التوريد وهي:

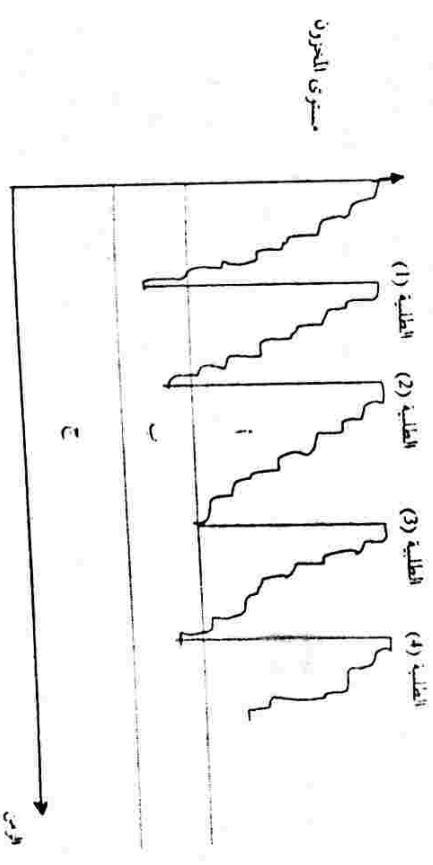
1- عندما يتأخر التوريد ويكون الطلب على المخزون طلباً متوسطاً (طلباً عادياً).

ب- عندما تكون هناك ظروف خاصة تجعل من الطلب على المخزون من المتوسط وذلك لفترة زمنية مؤقتة وليست طويلة.

ج- عندما تكون فترة التوريد ومعدل الطلب على المخزون يتميز بعدم التأكد. ويحدد حجم المخزون الاحتياطي بناء على درجة التأكد في كل من: 1- معدل الطلب على المخزون خلال فترة التوريد، 2- طول فترة التوريد وثباتها. فعندما يكون معدل الطلب على المخزون ثابتاً وموكداً وطول فترة التوريد معروفة بالتأكد ولا تخضع لأي احتمال فإن المخزون الاحتياطي المطلوب يكون أقل ما يمكن. أما في حالات عدم التأكد وعندما يتميز معدل الطلب على المخزون وطول فترة التوريد بالتقلب والتغير فسوف يتطلب الأمر زيادة المخزون الاحتياطي لمواجهة هذه التقلبات والتغيرات في معدل الطلب على المخزون وطول فترة التوريد.

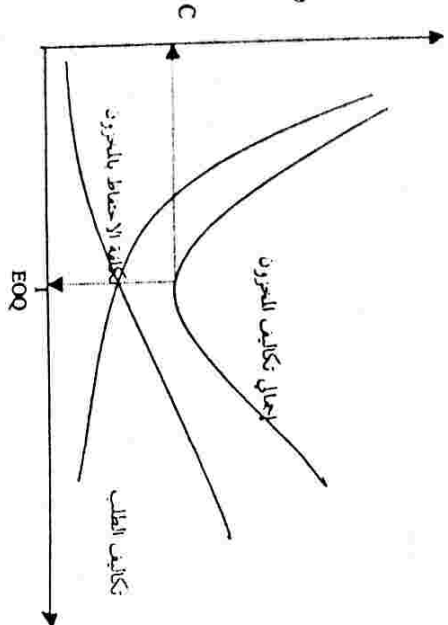
## 3- المخزون الحركي (الدوري) Dynamic Inventory :

ومر المخزون الذي يوجد بسبب دورية بعض العمليات ويهدف إلى توفير الخامات في شكل طلبات متباعدة زمنياً ينتج عن كل دورة منها تناقص تدريجي للمخزون الحركي نتيجة السحب المستمر منه يعقبه ارتفاع مفاجيء للمخزون بمجرد توريد طلبية جديدة. ويوضح الشكل (1-6) الأنواع المختلفة للمخزون حسب التوصيف السلوكي للمخزون.



شكل رقم (1-6) الأنواع المختلفة للمخزون حسب التوصيف السلوكي

إجمالي تكاليف  
أوامر الشراء  
وتكاليف التخزين



شكل (2-6) تحديد حجم الاستثمار الأمثل في المخزون

#### مفاهيم مراقبة المخزون:

مراقبة المخزون هي ذلك النشاط الخاص بالتخطيط والجدولة للمخامات والمواد والأجزاء ومختلف الاحتياجات المستخدمة في العمليات الإنتاجية ومبايعتها حتى يمكن توفيرها بما يتفق وجدولة التشغيل كما نوعاً وزماً. ويعرف أيضاً بأنه ضمان توافر الكميات المطلوبة من المواد وتحقيق التوازن بين الكميات المرجوة والكميات المطلوبة مع أقل استثمار ممكن؛ أي دون تحقيق التوازن وتخفض مخاطر التلف والفساد ومخاطر التقلبات في الأسعار. تنفقات التخزين والمناولة وتخفض مخاطر التلف والفساد ومخاطر التقلبات في الأسعار. من خلال هذه التعاريف نجد أن عملية الرقابة على المخزون تستهدف تحقيق التوازن بين المواد المشتراة والإنتاج، بحيث تضمن وجود أقل كمية من المخزون في المخازن لتعرض الوصول إلى أقل تكلفة ممكنة مع ضمان استمرار العملية الإنتاجية دون توقف. وحتى يتحقق ذلك لا بد من التأكد من توافر مجموعة من المعلومات الضرورية حتى تتحقق حالة التوازن. وهذه المعلومات هي:

1- التوصيف الدقيق لأنواع المخزون الذي سوف يخضع للمراقبة: أي ماذا نراقب؟ وقد استخدمت مجموعة من الأسس والمعايير التي وفقاً لها يتم تصنيف المواد المخزنة، ومن أوسع النظم استخداماً ما يعرف بأسلوب التحليل الثلاثي (A,B,C) والذي يعتمد في تصنيفه للمواد المخزنة على أساس القيمة السنوية للاستخدام من هذه المواد.

- تكلفة أماكن التخزين (الإيجار أم تكلفة الملكية).
- تكاليف المناولة (مقسمة الأفراد والمعدات المستخدمة)
- تكاليف التأمين والضرائب.
- التكاليف المرتبطة بانخفاض الجودة.
- تكاليف التقادم.
- تكاليف إدارة المخزون والاحتفاظ بالمخزلات.

ويتم احتساب هذه التكاليف في أغلب الأحوال على أساس نسبة مئوية من قيمة متوسط المخزون أو قيمة مطلقة تمثل تكلفة تخزين الوحدة في السنة. وترتبط هذه التكاليف بعلاقة طردية مع كمية وحجم وقيمة المخزون.

6 - التكاليف الإدارية - وتتضمن كافة التكاليف الناشئة عن الأنشطة الإدارية اللازمة لمراقبة المخزون وإدارة المخازن (مثل تكاليف الجرد وتكاليف تصميم نظام المعلومات المطلوب للمراقبة وتكاليف تحديد أو تقدير الاحتياجات).

ومن خلال الأنواع السابقة لتكاليف المخزون يمكن تقسيمها أو دمجها في نوعين أساسيين هما:

- 1- تكاليف أوامر الشراء (الطلب).
- 2- تكاليف التخزين.

حيث تشمل تكاليف الطلب أو أوامر الشراء جميع التكاليف المتعلقة بإصدار أوامر الشراء والإعداد وكذلك الأرباح المفقودة الناتجة عن فقدان المبيعات بسبب قلة وعدم كفاية المخزون وتكاليف التوقف والتأخيرات في الإنتاج بسبب المخزون غير الكافي. أما تكاليف التخزين فتشمل تكاليف المخازن والقرائد على رأس المال المستثمر في المخزون ورسوم التأمين وتكاليف الاستهلاك والتقاعد، وبالتالي فهي تمثل تكاليف الاحتفاظ بالمخزون والتكاليف الإدارية. ويمثل الشكل (2-6) تحديد حجم الاستثمار الأمثل في المخزون، ونلاحظ من خلال الرسم ما يأتي:

- 1- تكاليف الطلب الممتدة في الخط المنحني الهابط تقل مع زيادة حجم المخزون.
- 2- تكاليف الاحتفاظ بالمخزون الممتدة في الخط المنحني الصاعد تزداد مع زيادة حجم المخزون.

3- التكاليف الكلية تساوي مجموع تكاليف الطلب وتكاليف التخزين.

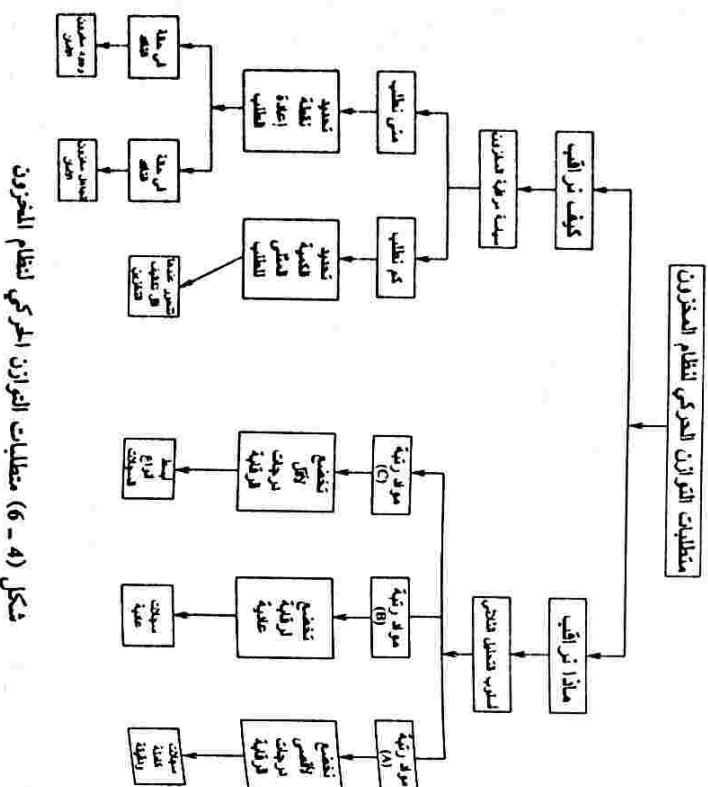
ونجد أن نقطة تقاطع المنحنيين منحنى تكاليف الطلبية ومنحنى تكاليف الاحتفاظ تتقابلهما أدنى نقطة على منحنى محصل التكاليف، وهذه النقطة، التي تمثل أدنى تكاليف إجمالية للمخزون، تمثل حجم الاستثمار الأمثل في المخزون.

## المخاضعة للمراقبة. (أي كيف نراقب؟)

وتتطلب إجابة السؤال الأول - (ماذا نراقب؟) تقسيم مفردات المخزون إلى مجموعات طبقاً للأولوية في الخضوع للرقابة. ويعرف الأسلوب المتبع في تحقيق هذا التقسيم بأسلوب التحليل الثلاثي (A,B,C). وتطبيق هذا الأسلوب على مفردات المخزون سوف يمكن تحديد تلك المجموعات من المخزون التي سوف تخضع أكثر من غيرها لجهود الرقابة على المخزون. كما تتطلب الإجابة على السؤال الثاني. (كيف نراقب؟) تحديد سياسة مراقبة المخزون التي سوف تتبع لكل مجموعة من مجموعات مفردات المخزون التي تحددت بأسلوب التحليل الثلاثي. إن تحديد سياسة مراقبة المخزون سوف تحد الكيفية التي تتم بها عملية مراقبة المخزون. إلا أن سياسة مراقبة المخزون (الإجابة على السؤال الثاني - كيف نراقب؟) سوف تتطلب الإجابة على سؤالين فرعيين هما:

1- تحديد الكمية المطلوب توريدها في كل أمر توريد (بالشراء أو بالصنع) ويعني هذا تحديد كمية الطلب - أي كم نطلب؟

2- تحديد التوقيت الذي يجب أن يصدر فيه أمر التوريد - ويعني هذا تحديد نقطة إعادة الطلب - أي متى نطلب؟ ويوضح الشكل (4 - 6) النظام الذي سيتبع لمراقبة المخزون أو متطلبات التوازن الحركي لنظام المخزون.



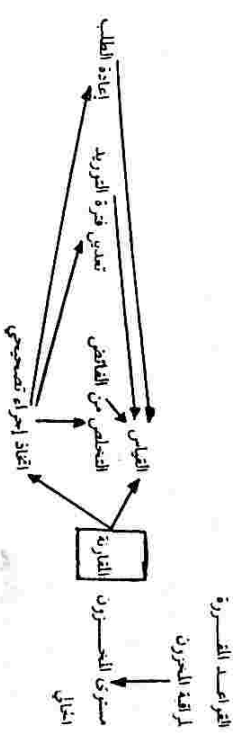
شكل (4 - 6) متطلبات التوازن الحركي لنظام المخزون

2- التوصيف الدقيق لوحدة قياس أنواع المخزون الذي سوف يخضع للمراقبة. أي كيف نقيس؟

3- التوصيف الدقيق لسياسة مراقبة المخزون المتبعة، مثلاً سياسة نقطة وكمية الطلب، وذلك لكل نوع من أنواع المخزون الخاضعة للمراقبة. أي كيف نراقب؟

## دورة الرقابة على المخزون:

تهدف دورة الرقابة على المخزون إلى ضمان تدفق المواد ومستلزمات ومتطلبات الإنتاج بدون توقف وبالكمية المطلوبة، وبهذا يتحقق نوع من الرقابة الكمية على المخزون، هذا بجانب الرقابة النوعية بوصول الكميات إلى جهات الاستخدام من الأصناف المطلوبة بالجدولة والمواسمات والمخاضعات المطلوبة، بالإضافة إلى تلافي مشاكل تأخير وصول المواد والاحتياجات نتيجة الاختلاف في فترات التوريد وأيضاً لتحقيق المرونة بين المراحل الإنتاجية حيث تحقق الرقابة على المخزون عدم ضرورية اعتماد المراحل الإنتاجية على بعضها البعض وتحقق التوازن بين معدلات تدفق المواد والاحتياجات من وإلى المخازن عن طريق تحقيق التوازن بين الطلب على المواد والطلب على المنتجات النهائية، كما تساهم في تخفيض تكاليف الإنتاج نتيجة انخفاض مخلفات المعروضات المتعلقة بالنقل والاستلام والمصطف والمصرف أي تكاليف التخزين على وجه العموم. وتتم دورة مراقبة المخزون من خلال بعض الخطوات التي يوضحها الشكل (3 - 6).



شكل (3 - 6) خطوات دورة مراقبة المخزون

## النماذج الكمية المستخدمة في الرقابة على المخزون:

تستهدف عملية الرقابة على المخزون تحقيق التوازن بين المواد المشتراة والإنتاج، ولكي يتم تحقيق هذا التوازن لا بد من توافر مجموعة من المعلومات الضرورية أهمها:

1- التوصيف الدقيق لأنواع المخزون الذي سوف يخضع للمراقبة (أي ماذا نراقب؟)  
2- التوصيف الدقيق لسياسة مراقبة المخزون المتبعة لكل نوع من أنواع المخزون

من إجمالي المفق على النظام الرقابي.

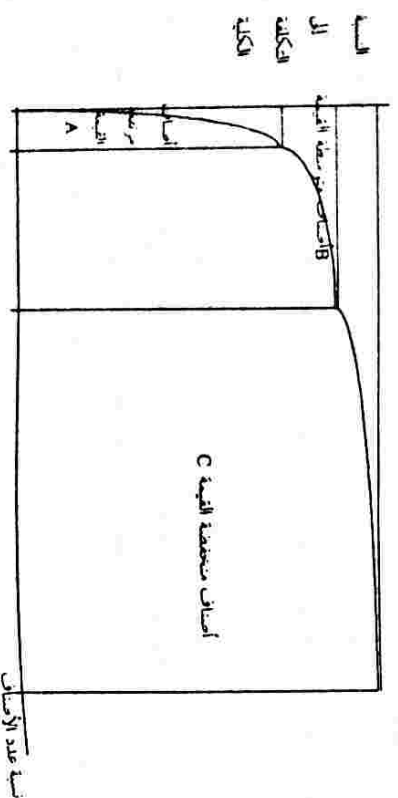
2- مواد ومستلزمات ذات قيمة استخدام أقل نسبياً ويرمز لها بالرمز (B).

عناصر هذا القسم تمثل ما بعد قسم (A) في الأهمية وتتراوح نسبتها إلى المخزون الكلي ما بين 15% : 30% من الأصناف المخزنة، وتستوعب أيضاً ما بين 15% : 30% الكلي من إجمالي قيمة الاستخدام السنوي للمخزون وبالتالي فهي تمثل نسبة أقل من الفئة السابقة بالنسبة إلى تكلفة المواد على الرغم من أن عددها أكبر من التصنيف السابق. وهذا القسم يحتل درجة ثانية من جهد نفقات الرقابة ونسبة لا تتعدى 20% من إجمالي المفق على النظام الرقابي لعناصر المخزون.

3- مواد ومستلزمات ذات قيمة استخدام منخفض ويرمز لها بالرمز (C).

عناصر هذا القسم تمثل باقي عناصر المخزون وهي نسبة تتراوح ما بين 50% : 75% من العناصر ولا تتعدى قيمة الاستخدام السنوي لها إلى الاستخدام الكلي للعناصر المخزنة ما بين 5% : 10% وهي تقسم معظم الأصناف ولكنها تمثل نسبة منخفضة من تكلفة الإنتاج وغالباً ما تتسم بانخفاض معدل دوران مخزونها. وهذا القسم يمثل أقل الأقسام حاجة إلى المجهود والنفقات الرقابية.

ويمكننا توضيح أقسام مجموعات المخزون وفقاً لمودج التحليل الثلاثي في الشكل (5-6)



شكل (5-6) التحليل الثلاثي (A,B,C) للأصناف المخزنة حسب القيمة والعدد

أولاً - تصنيف المخزون حسب نظام التصنيف الثلاثي (A,B,C):

إن من عناصر الرقابة على المخزون تحديد درجة الرقابة المطلوبة، حيث إن الرقابة على المخزون عملية مكلفة وتحتاج إلى وقت وجهد كبيرين وذلك نتيجة لصفحة حجم وعدد الأصناف المخزنة، وقد ينتج عن ذلك أن بعض المشروعات لم توجه أي اهتمام إلى الرقابة على المخزون أحياناً أو أنها قامت بالرقابة على عناصر قليلة الأهمية وأهملت العناصر الأساسية في بعض الأحيان. ونظراً لأن أداء أي نشاط يقابله تكلفة معينة إذن فمن الضروري عندما نهدف إلى رفع كفاءة الأداء، أن تكون التكلفة في الحدود التي لا تتعارض مع تحقيق هذا الهدف. وبناء عليه فإن درجة الرقابة على المخزون يجب أن تكون مرتبطة بإجمالي حجم الأموال أو الاستثمارات المتعلقة بعنصر معين أو مجموعات عناصر المخزون، ولكن نظراً لما تتطلبه عمليات الرقابة التفصيلية للمخزون من نفقات وجهد كبير خاصة وأن الأصناف المخزنة قد يصل عددها إلى عشرات أو مئات الآلاف من النواعيات المختلفة من المواد والخصامات والمهمات وقطع الغيار والمستحجات الخافله، لذا فمن الضروري أن يحدد نظام الرقابة على المخزون تقسيماً للأصناف المخزنة إلى فئات ترتبط بدرجة أهمية المجموعة المخزنة أي تصنيف مجموعة الأصناف حسب حجم ونوع ومدى الرقابة المطلوبة لها، بحيث يكون هناك قدر مناسب من الرقابة يتناسب مع كل مجموعة حسب أهميتها، ويحدد درجة أهمية المجموعة بحسب قيمة ما يستخدم من الصنف سنوياً وتستخرج القيمة على أساس متوسط الاستخدام السنوي من الصنف أو الاستخدام المقرر في السنة مفروراً في قيمة الوحدة.

وقد استخدمت مجموعة من الأسس والمعايير التي يتم وفقاً لها تصنيف المواد المخزنة ومن أوسع النظم استخداماً ما يعرف بنظام التصنيف الثلاثي (A,B,C) الذي ينشئ على أساس أن: 1- تخزن المواد ذات القيمة العالية والتي تشكل حوالي 80% من قيمة رأس المال المستثمر في المخزون. لذا يتوجب أن يخضع لرقابة دقيقة وعالية (صنف A). 2- تخزن المواد المتوسطة القيمة تحت صنف B. 3- المواد التي تشكل قيمة منخفضة من رأس المال المستثمر في المخزون حوالي (20%) ولكن في نفس الوقت يشكل من حيث الكمية حوالي 80%. لذا يخضع إلى رقابة أقل (صنف C). ويتم تصنيف المواد وفقاً لهذا النظام الثلاثي إلى المجموعات الآتية:

1- مواد ومستلزمات ذات قيمة استخدام مرتفعة ويرمز لها بالرمز (A).

عناصر هذا القسم تمثل قيمة هذا النظام وتحتل ما بين 10% : 20% من إجمالي عناصر المخزون وتتراوح قيمة الاستخدام السنوي للمخزون من هذه الأصناف نسبة تتراوح ما بين 60% : 80% لذا فهي تشمل الأصناف التي تستخدم بكميات كبيرة وتكون جزءاً كبيراً من المخزون وقيمة الوحدة فيها مرتفعة نسبياً وتمثل نسبة كبيرة من تكلفة المواد في المنتج النهائي، وبالتالي فهي تحتاج إلى رقابة دقيقة ومشددة وتستحوذ على نسبة مرتفعة



جدول (3 - 6) بيانات الاستخدام السنوي للأصناف

رقم الصنف	قيمة (تكلفة) الوحدة	معدل الاستخدام السنوي
201	0.2	1000
202	0.08	2000
203	0.9	1500
204	1.00	2400
205	0.2	1500
206	1.00	45000
207	1.3	78461
208	0.8	37500
209	0.2	2000
210	0.5	300000
211	0.25	100000
212	0.07	2000
213	3.00	200000
214	0.4	50000
215	1.00	12000
216	0.3	3000
217	1.00	1900
218	0.7	4000
219	0.4	100
220	0.35	600

المطلوب:

إستخدام نموذج التحليل الثلاثي (A,B,C) وتقييم هذه الأصناف إلى مجموعات حسب أهميتها للوقوف على المجموعة ذات الأهمية النسبية الأولى في الدراسة والاعتماد.

الحل:

يمكن حساب إجمالي قيمة الاستخدام السنوي وذلك عن طريق القانون التالي:

قيمة الاستخدام السنوي = معدل الاستخدام السنوي × تكلفة الوحدة

$$\text{الصنف } 201 = 0.2 \times 1000 = 200$$

مراحل تطبيق نظام التحليل الثلاثي (A,B,C) في الرقابة على المخزون:

- 1- تحديد الأصناف التي سيتم استخدامها سترياً.
- 2- تحديد تكلفة الوحدة لكل مادة أو جزء.
- 3- حساب معدل الاستخدام السنوي بالوحدات لكل مادة أو جزء بالمعادلة التالية:
- 4- حساب قيمة الاستخدام السنوي لكل مادة أو جزء بالمعادلة التالية:
- قيمة الاستخدام السنوي = معدل الاستخدام السنوي × تكلفة الوحدة
- 5- القيام بترتيب الأصناف ترتيباً تنازلياً وفقاً لقيمة الاستخدام السنوي.
- 6- إستخراج القيمة الإجمالية للمجموعة للاستخدام السنوي (المجموع الصاعد) على أساس الترتيب الناتج من الخطوة السابقة.
- 7- إستخراج النسب المئوية للمجموعة لعدد الأصناف مقابل النسب المئوية لإجمالي المستخدم من الأصناف.
- 8- إعداد رسم بياني يوضح على المحور الأفقي النسب المئوية المجمعة لإجمالي الأصناف وعلى المحور الرأسي النسب المئوية المجمعة لقيمة الاستخدام السنوي للأصناف.
- 9- رسم منحنى المجموع الصاعد والذي عن طريقه يمكننا تحديد التقسيمات الثلاثة السابقة (A,B,C) في ضوء الاسترشاد بتغيرات منحنى المجموع الصاعد من نقطة إلى أخرى.
- 10- إعداد جدول مبسط يوضح نتائج النظام الرقابي السابق لمجموعات الأصناف الثلاثة من حسب نسبة أصناف كل مجموعة ونسبة قيمة الاستخدام السنوي لها.

مثال (1) يبين كيفية استخدام نموذج التحليل الثلاثي (A,B,C) في الرقابة على المخزون.

لقد كانت بيانات الاستخدام السنوي لأصناف المخزون لإحدى المشروعات الصناعية وعددها 20 صنفاً من العدد والأدوات. وتشمل هذه البيانات معدلات الاستخدام السنوي وقيمة تكلفة الوحدة من كل منها كما هي مبيته في الجدول (3 - 6).



100 = 60.3 والجدول التالي (5 - 6) تبين بقية النسب :

جدول (5 - 6) قيمة المتبقي للمساعد للاستخدام السنوي والنسب المتجمعة لها

الترتيب التنازلي للاصناف	رقم الصنف	إجمالي قيمة الاستخدام السنوي	المتبقي للمساعد لقيمة الاستخدام السنوي	النسبة المتجمعة لقيمة الاستخدام السنوي %
1	213	600000	600000	60.3
2	210	150000	750000	75.4
3	207	102000	852000	85.7
4	206	35000	897000	90.1
5	208	3000	927000	93.18
6	211	25000	952000	95.7
7	214	20000	972000	97.7
8	215	12000	984000	98.9
9	218	2800	986800	99.1
10	204	2400	989200	99.4
11	217	1900	991100	99.6
12	203	1350	992450	99.7
13	216	900	99350	99.8
14	209	400	993750	99.89
15	205	300	994050	99.9
16	202	210	994260	99.94
17	201	200	994460	99.96
18	202	160	994620	99.98
19	212	140	994760	99.99
20	219	45	994805	%/100

من خلال المعلومات الموجودة في الجدول (5 - 6) يمكن رسم منحنى المتبقي للمساعد لإجمالي قيمة الاستخدام السنوي كما هو موجود في الشكل (4 - 6)

بقية القيم للاصناف الأخرى مبينة في الجدول (4 - 6).

جدول (4 - 6) قيمة الاستخدام السنوي

رقم التصنيف	قيمة (كغ/الوحدة)	معدل الاستخدام السنوي	إجمالي قيمة الاستخدام السنوي	الترتيب التنازلي للاصناف
201	0.2	1000	200	17
202	0.08	2000	160	18
203	0.9	1500	1350	12
204	1.00	2400	2400	10
205	0.2	1500	300	15
206	1.00	45000	45000	4
207	1.3	78461	102000	3
208	0.8	37500	30000	5
209	0.2	2000	400	14
210	0.5	300000	150000	2
211	0.25	100000	25000	6
212	0.07	2000	140	19
213	3.00	200000	600000	1
214	0.4	50000	20000	7
215	1.00	12000	12000	8
216	0.3	3000	900	13
217	1.00	1900	1900	11
218	0.7	4000	2800	9
219	0.4	100	45	20
220	0.35	600	210	16
			994805 د. ل	

والآن يمكن حساب النسبة المتجمعة لقيمة الاستخدام السنوي (%) = قيمة

الاستخدام السنوي للمصنف الواحد ÷ إجمالي قيمة الاستخدام السنوي ضرب 100 =  
النسبة المتجمعة لقيمة الاستخدام السنوي (%) للمصنف 213 = 600000 ÷ 994805<sup>(هـ)</sup>

# 1- من حيث درجة الرقابة :

1- المواد والأجزاء في القسم (A) يجب أن تخضع لأقصى درجة ممكنة من الرقابة مع مراجعة دورية على فترات متقاربة (أسبوعياً مثلاً) لمستوى المخزون منها ومتابعة دقيقة لمواعيد التوريد المتفق عليها.

2- المواد والأجزاء في القسم (B) تخضع لرقابة عادية مع مراجعة دورية على فترات أكثر تباعداً (كل أسبوعين مثلاً) لمستوى المخزون منها.

3- المواد والأجزاء في القسم (C) تخضع لأقل درجة من درجات الرقابة مع مراجعة دورية على فترات متباعدة (كل شهر مثلاً) لمستوى المخزون منها.

## II - من حيث طبيعة السجلات المستخدمة :

1- المواد والأجزاء في القسم (A) يجب أن يتوفر لها سجلات كاملة ودقيقة مع مراجعة حسابية مستمرة لهذه السجلات ومراقبة دقيقة للتالف والمفروض منها.

2- المواد والأجزاء في القسم (B) يجب أن يتوفر لها سجلات عادية ولكن جيدة مع مراجعة حسابية على فترات متباعدة لهذه السجلات، ومراقبة عادية للتالف والمفروض منها.

3- المواد والأجزاء في القسم (C) يحتفظ لها بأبسط أنواع السجلات فقط.

## III - من حيث إجراءات العطب والتوريد :

1- المواد والأجزاء في القسم (A) يجب أن تخضع للتحديد الدقيق للمحجم الأعلى للعاطية ونقطة إعادة العطب مع بذل الجهود المستخدمة لخفض فترات التوريد إلى أدنى حد ممكن.

2- المواد والأجزاء في القسم (B) يجب أن يتحدد لها المحجم الأعلى للعاطية ونقطة إعادة العطب ولكن ليس بالدقة التي يجب أن تتم للمواد والأجزاء في القسم (A).

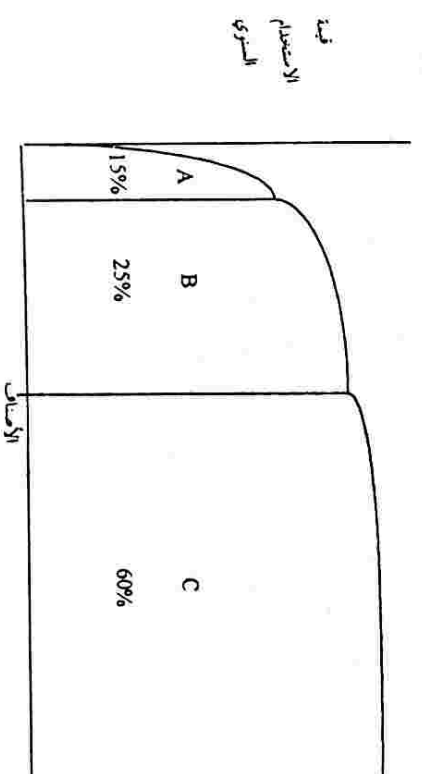
3- المواد والأجزاء في القسم (C) قد لا يتبع لها أية سياسة علمية لمراقبة المخزون للوصول إلى التكاليف الدنيا للمخزون، وأبسط سياسة يمكن أن تتبع بخصوصها يمكن أن تكون مثلاً شراء احتياجات سنة قادمة بينما لا يزال المخزون الحالي متوفراً حتى لا تواجه عجزاً في المستقبل.

إن أسلوب التحليل الثلاثي (A,B,C)، يتيح لنا تحديد نطاق الرقابة على المخزون بحيث يمكن تركيز جهود الرقابة على تلك المواد والأجزاء في القسم (A) التي تمثل أعلى نسبة في قيمة الاستخدام السنوي.

ثانياً - سياسة مراقبة المخزون:

تختص نماذج مراقبة المخزون بالبحث عن السياسة التخزينية المثلث حيث تستخدم

# شكل (6-6) مبحثي المتجمع المساعد



جدول (8-6)

البنود	الرمز	القيمة
15%	A	85%
25%	B	13.2%
60%	C	1.1%

جدول (9-6)

النسبة	عدد الأصناف	نسبة قيمة الاستخدام السنوي لكل مجموعة إلى إجمالي قيمة الاستخدام السنوي للأصناف بالمشروع	نسبة عدد الأصناف في كل مجموعة إلى إجمالي عدد الأصناف في المشروع
مجموعة A	3	85.7%	15%
مجموعة B	5	13.2%	25%
مجموعة C	12	101%	60%
الإجمالي	20	100%	100%

إستخدامات التحليل الثلاثي (A,B,C):

إن الهدف من التحليل الثلاثي (A,B,C) في أي مجال إداري، هو تحديد النطاق الذي يجب أن تتركز فيه الجهود حتى تحقق أعلى النتائج. وفي مجال مراقبة المخزون يمكن تحديد الاستخدامات التالية للتحليل الثلاثي (A,B,C):

المخزون السلمي خلال فترة معينة فإن إحدى هاتين المجموعتين من التكاليف والمتعلقة بالاحتفاظ بالمخزون تبدأ في الارتفاع نتيجة للزيادة في حجم متوسط المخزون. وفي الوقت الذي تبدأ فيه المجموعة الثانية والتمثلة في إعداد الطلبات في الهبوط، بينما تقل تكاليف الاحتفاظ بالمخزون كلما هبط متوسط المخزون في الوقت الذي ترتفع فيه تكاليف إعداد الطلبات.

وبذلك تعد كمية الطلب الاقتصادية معياراً للموازنة بين تكلفة التخزين التي تتحدد عند أدنى نقطة إجمالي هذه التكاليف. من خلال ما ذكر في السابق يمكن الاستنتاج بأن نموذج الكمية الاقتصادية للطلب يهدف إلى تحقيق التوازن المطلوب بين عنصري التكلفة المذكورين أعلاه وذلك بتحديد الحد الأدنى لمجموع تكلفتي الاحتفاظ بالمخزون وإعداد الطلبات، ثم احتساب حجم الكمية الذي يناظر هذا المستوى المنخفض للتكاليف الكلية. وينشأ هذا النموذج على عدة فروض أساسية.

الفروض الأساسية لنموذج كمية الطلب الاقتصادية:

- 1- الطلب على المخزون السلمي ثابت ومعروف بالتحديد (معدل الطلب ثابت).

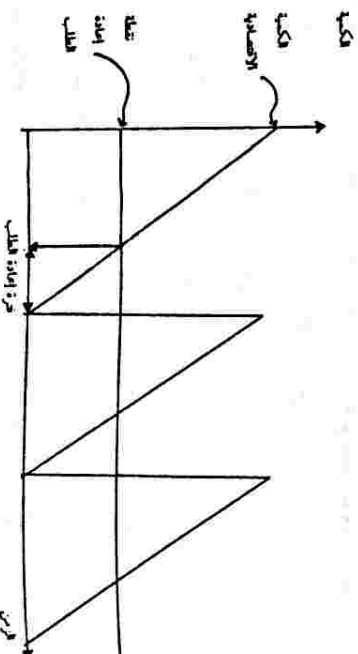
- 2- فترة إعادة الطلب محددة ومعروفة أيضاً.

- 3- تكلفة الوحدة أو سعر الشراء ثابت وغير قابل للتغير.

- 4- ظاهرة تقاذ المخزون غير مسموح بها في مثل هذا النموذج.

- 5- تساوي حجم الطلبات وعدم إمكانية التجزئة.

وحيث إن هذا النموذج يفترض أن معدل الطلب على المخزون السلمي مستقر وثابت خلال الفترات الزمنية المتتالية، لذلك، فإن سلوك مثل هذا النظام من المخزون يمكن تبينه بياناً كما في الشكل (7-6).



شكل رقم (7-6) سلوك نظام المخزون: طلب مؤكد ويعمل ثابت

أغلب هذه النماذج في محاولة للإجابة على السؤال كيف نراقب؟ ويتطلب ذلك وضع سياسة محددة لمراقبة المخزون. ولكي يتم وضع هذه السياسة لا بد من الإجابة على السؤالين الفرعيين:

- 1- تحديد الحجم الأمثل للطلبية التي يجب شراؤها أو الكمية التي يجب إنتاجها.

- 2- تحديد الوقت المناسب لإصدار أمر الشراء (الطلبية).

ورغم اختلاف هذه النماذج من حيث الفروض التي بنيت عليها إلا أن أغلب هذه النماذج تستخدم التكاليف المرتبطة بطلب وتخزين المواد كأساس ومعيار لتقييم استراتيجيات وسياسات التخزين، بالإضافة إلى ذلك فإن نماذج الرقابة على المخزون تختلف في بنيتها الرياضية وفقاً لطبيعة وسلوكيات الطلب على المخزون. فعندما يكون هذا الطلب من النوع الثابت والمحدد مسبقاً فإن النماذج الرياضية تكون من النوع المحدد الذي يمكن تطبيقه في ظروف التأكد التام. أما إذا اتخذ الطلب على المخزون سلوكاً متغيراً وأصبح الطلب في مثل هذه الحالات متغيراً عشوائياً، فإن النماذج المستخدمة في هذه الحالة ستكون من النماذج المعينة على فكرة الاحتمالات وهي أقدر النماذج على التعامل مع الطلب في ظل ظروف عدم التأكد.

والآن يمكن الإجابة على السؤالين الفرعيين:

- 1- تحديد الحجم الأمثل للطلبية التي يجب شراؤها أو الكمية التي يجب إنتاجها.

- 2- تحديد الوقت المناسب لإصدار أمر الشراء (الطلبية) في ظل كل من ظروفي التأكد وعدم التأكد (متى نطلب).

- 1- تحديد الحجم الأمثل للطلبية التي يجب شراؤها أو الكمية التي يجب إنتاجها:

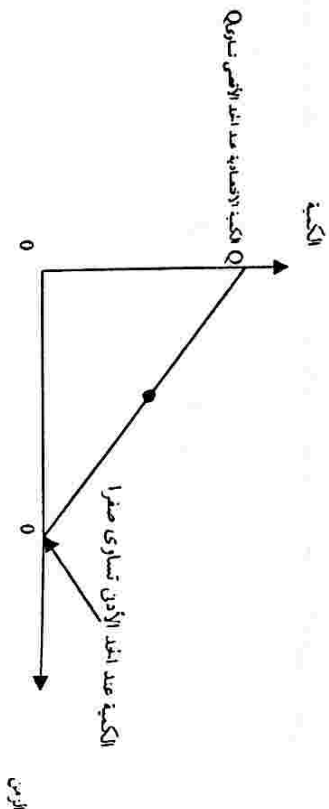
نموذج الكمية الاقتصادية للطلب (EOQ) Economic Order Quantity Model:

يرجع الفضل الأكبر في تقديم هذا النموذج إلى أحد الرواد البارزين في هذا المجال وهو هاريس<sup>9</sup>. ويعتبر هذا النظام من أكثر النظم الخاصة بالرقابة على المخزون استخداماً، ويقوم على تحديد كمية أمر التوريد وهي الكمية الاقتصادية التي تؤدي إلى تخفيض تكلفة الحصول على المنتج إلى أقل حد ممكن، وبالتالي فإنه يمكن تعريف الكمية الاقتصادية للطلب بأنها: كمية (أو قيمة) المواد التي يجب شراؤها في المرة الواحدة بحيث تصل تكاليف أوامر الشراء وتكاليف التخزين إلى أدنى حد ممكن وفي نفس الوقت يمكن مقابلة احتياجات جهات الاستخدام. ومن خلال هذا التعريف نجد أن كمية الطلب الاقتصادية تأخذ نوعين من التكاليف في الاعتبار وهما:

- 1- التكاليف الناشئة عن الاحتفاظ بالمخزون Holding costs.

- 2- التكاليف الناشئة عن إعداد الطلبات Ordering Costs.

هذان النوعان من التكاليف يتعارضان، حيث يلاحظ أنه كلما زاد حجم متوسط

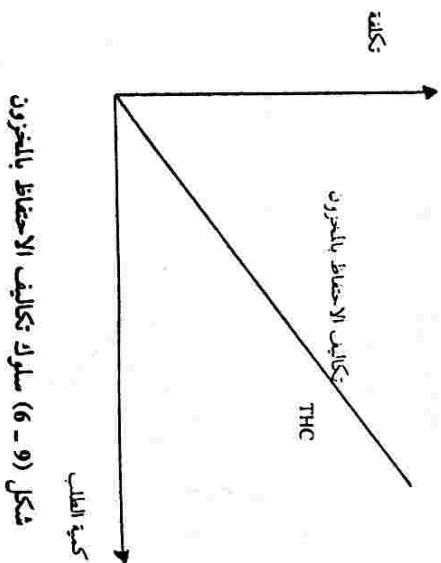


شكل (8 - 6) متوسط المخزون

$$Q/2 = Q + 0/2 =$$

أما بالنسبة لتكاليف الاحتفاظ بالمخزون THC فيتم احتسابها في أغلب الأحوال على أساس نسبة مئوية من قيمة متوسط المخزون أو قيمة مطلقة تمثل تكلفة تخزين الوحدة في السنة وترتبط هذه التكاليف بعلاقة طردية مع كمية وحجم وقيمة المخزون وبالتالي فإن:

$$THC = \frac{Q}{2} \times CR \quad (1)$$



شكل (9 - 6) سلوك تكاليف الاحتفاظ بالمخزون

أما بالنسبة للتكاليف الناشئة عن إعداد الطلبية TOC فيتم حساب التكاليف الناشئة عن إعداد الطلبيات وذلك عن طريق ضرب عدد الطلبيات في تكلفة إعداد الطلبية الواحدة، وبالتالي فإن:

إشتقاق كمية الطلب الاقتصادية رياضياً (في حالة ما يتم توريد الطلبية في لحظة واحدة):

قبل البدء في تحليل كيفية اشتقاق كمية الطلب الاقتصادية رياضياً يجب أن نحدد الرموز الآتية:

$Q$  = حجم الطلبية التي يشتريها المشروع (كل مرة من عنصر ما بالوحدات).

$\frac{Q}{2}$  = متوسط المخزون.

$CR$  = تكلفة تخزين الوحدة الواحدة.

$D$  = الاحتياجات السنوية.

$TC$  = التكاليف الكلية للمخزون.

$THC$  = التكاليف الناشئة عن الاحتفاظ بالمخزون.

$TOC$  = التكاليف الناشئة عن إعداد الطلبية.

$TC^*$  = التكلفة الكلية المثلى للمخزون.

$F$  = تكلفة إعداد الطلبية الواحدة

$EOQ^{(*)}$  = كمية الطلب الاقتصادية المثلى.

$A$  = العدد الأمثل لمرات التوريد.

كما رأينا في اقتراحات النموذج فإن معدل الطلب على المخزون معروف وثابت وبالتالي فإن مستوى المخزون عند حده الأقصى عند النقطة  $Q$  عند استلام الطلبية. ويصل المخزون إلى أدنى مستوى عند الصفر، لذلك فإن متوسط المخزون سيكون كمية بسيطة بين الحد الأعلى والحد الأدنى ونتم احتسابها كالآتي:

مستوى المخزون عند حده الأقصى =  $Q$

مستوى المخزون عنده حده الأدنى =  $0$

إذن متوسط المخزون = الحد الأقصى + الحد الأدنى  $\div 2$

متوسط المخزون =  $Q + 0 \div 2 = \frac{Q}{2}$

هذا من الناحية الجبرية، أما من الناحية البيانية فإن ذلك يكون كالآتي:

مثال (2) يوضح الأسس التي يقوم عليها نموذج كمية الطلب الاقتصادية. لو توفرت لديك المعلومات والمعطيات التالية:

$$\text{الاحتياجات السنوية (D)} = 10000 \text{ وحدة.}$$

$$\text{التكاليف الناشئة عن إعداد أوامر الشراء (TOC)} = 25 \text{ د. ل. / أو شراء}$$

$$\text{التكاليف الناشئة عن تخزين المواد (THC)} = 50 \text{ ديناراً / وحدة/ السنة.}$$

باستخدام طريقة التجربة والخطأ يمكن المفاضلة بين أحجام مختلفة من أوامر الإنتاج. على أساس مبدأ أقل التكاليف الكلية المصاحبة لطلب وتخزين كل حجم من هذه الأحجام المقترحة. هذا ويمكن عرض نتائج العمليات الحسابية المطلوبة لإجراء عملية المفاضلة، كما هو مبين بالجدول (10 - 6).

جدول (10 - 6) التكاليف الإجمالية

أحجام الكميات	التكلفة الناشئة عن الاحتفاظ بالمخزون بالدينائر (THC)	التكلفة الناشئة عن إعداد الشراء بالدينائر (TOC)	التكاليف الإجمالية (TC)
250	62.50	1000.00	1062.50
500	125.00	500.00	625.00
750	186.00	333.33	519.33
1000	250.00	250.00	500.00
1250	312.50	200.00	512.50

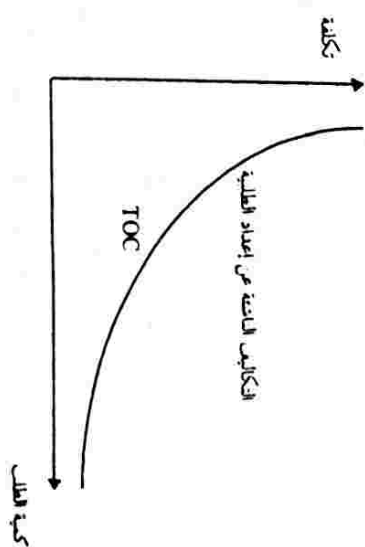
إذا تبعنا النتائج المدونة في الجدول (10 - 6)، يمكن استنتاج الآتي:

الكمية الاقتصادية للطلب هي 1000 وحدة، باعتبار أن التكاليف الإجمالية ستكون عند أدنى حد لها (500) دينار عندما تكون الكميات بأحجام تعادل (1000) وحدة. عند هذا المستوى تكون التكاليف الناشئة عن الاحتفاظ بالمخزون مساوية للتكلفة الناشئة عن إعداد أوامر الطلب، وهو التوازن الذي يهدف إليه النموذج. ويمكن التعبير عن هذه العلاقات بيانياً باستخدام نفس البيانات كما هو موضح في الشكل (12 - 6).

عدد الطلبات = خارج قسمة الاحتياجات السنوية على حجم الطلبية الواحدة.

وبذلك تكون:

$$TOC = \frac{D}{Q} \times F \quad (2)$$

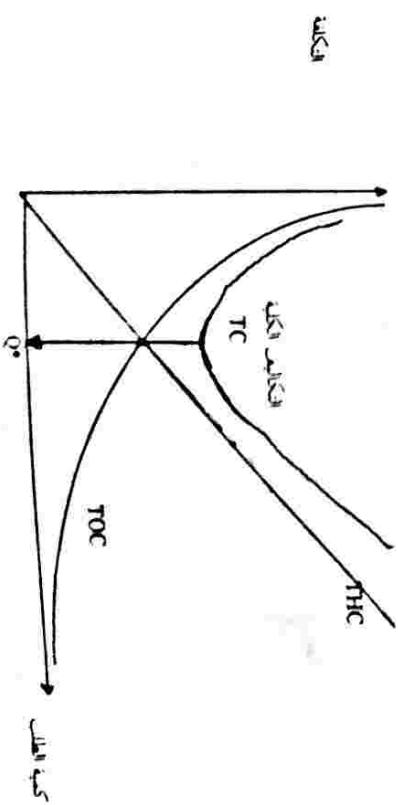


شكل (10 - 6) سلوك تكاليف الطلب

وأخيراً يمكن حساب التكاليف الكلية للمخزون TC وهي عبارة عن مجموع التكاليف المرتبطة بالمخزون وتقسم كلاً من التكاليف الناشئة عن الاحتفاظ بالمخزون حصناً إليها التكاليف الناشئة عن إعداد الطلبات. وبذلك تكون:

$$TC = THC + TOC$$

$$TC = \left(\frac{D}{Q} \times CR\right) + \left(\frac{D}{Q} \times F\right) \quad (3)$$



شكل (11 - 6) سلوك التكاليف الكلية للمخزون

وللمحصل على التكلفة الكلية المثلى  $TC^*$  نعوض في معادلة التكاليف الكلية

للمخزون  $TC$  بقيمة  $Q^*$  المحسوبة في المعادلة (5)

$$TC^* = THC + TOC$$

وكما رأينا فإن الحل الأمثل يتحقق عندما تكون  $THC = TOC$  وبالتالي فإن:

$$TC^* = \frac{Q^*}{2} \times CR + TOC$$

$$THC = TOC$$

$$TOC = \frac{Q^*}{2} \times CR$$

$$TC^* = \frac{Q^*}{2} \times CR + \frac{Q^*}{2} \times CR$$

$$TC^* = 2(\frac{Q^*}{2} \times CR)$$

$$TC^* = Q^* \times CR \quad (6)$$

مثال (3) - إذا كانت الاحتياجات السنوية في أحد المشروعات من مادة معينة هي 2000 وحدة في السنة وكانت تكلفة تخزين الوحدة هي (1) دينار/السنة كما كانت تكاليف إعداد الطلبية الواحدة هي (10) دنانير.

المطلوب:

- 1- الرسم البياني لسلوك عناصر التكاليف التي تتغير بكمية الطلب  $Q$ .
- 2- إيجاد ما يلي حسابياً:

أ- الكمية المثلى للطلب  $Q^*$ .

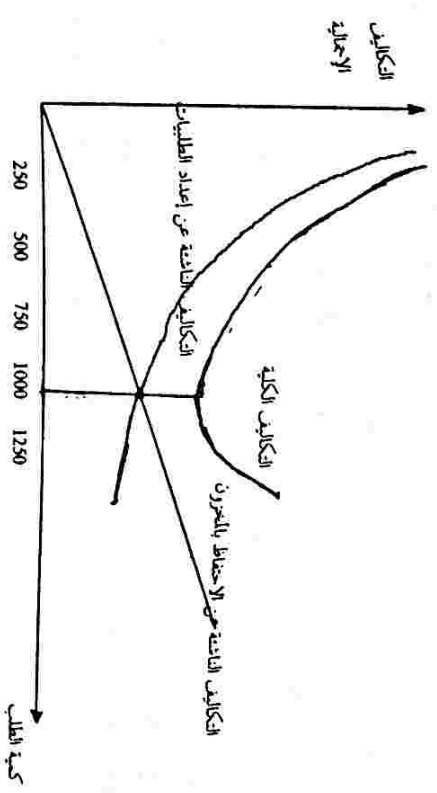
ب- التكلفة الكلية المثلى للمخزون  $TC^*$

ج- العدد الأمثل لمرات التوريد  $A$ .

الحل:

جدول (11 - 6) التكاليف الكلية

كمية الطلب $Q$	التكاليف الناشئة عن التخزين $THC = \frac{Q}{2} \times CR$	تكاليف الطلب $TOC = \frac{D}{Q} \times F$	التكاليف الكلية
50	25	400	425
100	50	200	250
150	75	133.33	208.33
200	100	100	200
250	125	80	205
300	150	66.66	216.66



شكل رقم (12 - 6) قنبل الكمية الاقتصادية للطلب بيانياً

وبالتالي فإن الكمية الاقتصادية للطلب ومن خلال الرسم تكون الكمية المناظرة لنقطة تكافؤ وتبادل عنصري التكلفة الإجمالية أو أدنى نقطة لمستوى التكاليف الإجمالية، حيث إن الكمية الاقتصادية المثلى للطلب تحدد عندما تكون التكاليف الناشئة عن الاحتفاظ بالمخزون لمدة سنة = التكاليف الناشئة عن إعداد الطلبات في نفس السنة. أي أن:

$$TOC = THC$$

$$(\frac{D}{Q} \times CR) = (\frac{D}{Q} \times F) \quad (4)$$

وللمحصل على معادلة الكمية الاقتصادية للطلب فنربط طرفي المعادلة (4) في (Q)

$$(\frac{D}{Q} \times CR) \times Q^2 = (\frac{D}{Q} \times F) \times Q^2$$

$$2DF = CR \times Q^2$$

$$Q^2 = \frac{2DF}{CR}$$

وبها

$$Q = \sqrt{\frac{2DF}{CR}}$$

إذاً الكمية الاقتصادية المثلى للطلب  $Q^*$

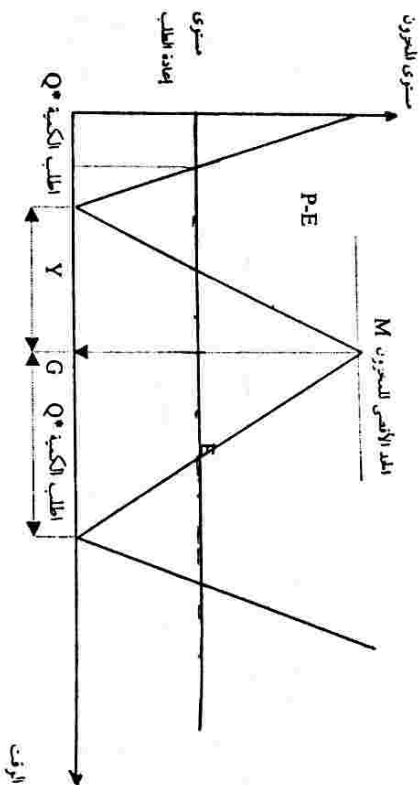
$$Q^* = \sqrt{\frac{2DF}{CR}} \quad (5)$$

ويمكن تحديد العدد الأمثل لمرات التوريد (A) بالتعويض في المعادلة التالية:

$$A = \frac{D}{Q^*}$$



5- معدل تراكم المخزون (P-E) ويشير إلى عدد الوحدات التي سوف يزداد بها المخزون ويكون هو الفرق بين معدل التوريد (P) ومعدل الاستخدام (E).  
ويوضح الشكل التالي الطريقة التي يعمل بها هذا النموذج:



شكل رقم (14 - 6) سلوك المخزون عندما يتم التوريد على دفعات

وبالتالي ففي هذا النموذج نجد الآتي:

متوسط المخزون =  $\frac{M}{2}$  وليس  $\frac{Q}{2}$  كما في النموذج السابق

$$\text{التكاليف الكلية} = \frac{M}{2} \times CR + \frac{Q}{2} \times F$$

حيث  $P = E = \frac{M}{2}$  ميل خط تراكم المخزون

(8)  $P = E$  ميل خط تراكم المخزون إذا لم يكن هناك استخدام خلال فترة التوريد

من المعادلة (7)  $M = (P-E) \times Y$

من المعادلة (8)  $\frac{Q}{2} = Y$

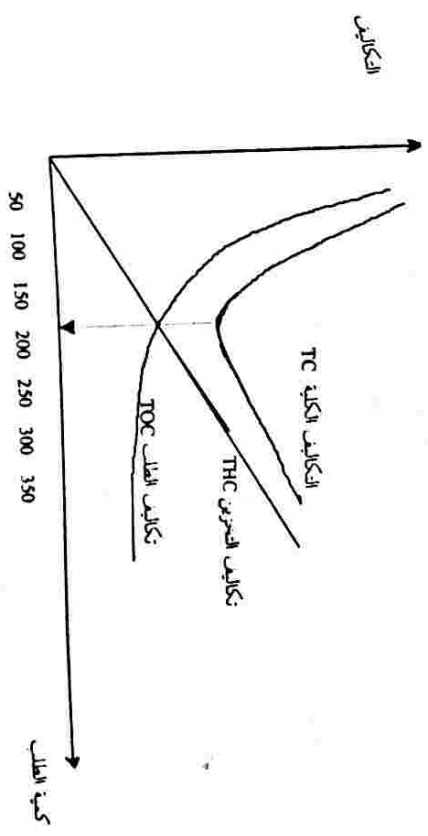
بالتعويض عن (Y) في المعادلة (9)

$$M = \frac{P-E}{2} (Q) : M = Q(1 - \frac{E}{P}) \quad (11)$$

وبالتالي تكون معادلة الكمية الاقتصادية للطلب في حالة التوريد على دفعات هي كالآتي:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DP}{CR(1-\frac{E}{P})}} \quad (12)$$

حيث تشير  $Q^*$  إلى الكمية المثلى لأمر التوريد



شكل (13 - 6) منحني التكاليف

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DP}{CR}} \quad \text{الكمية المثلى للطلب}$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2(2000)(10)}{1}} = 200 \text{ Units}$$

ب- التكلفة الكلية المثلى للمخزون  $TC^* = Q^* \times CR$

$$TC^* = 200 \times 1 = 200 \text{ Denar/Unit}$$

ج- عدد مرات التوريد المثلى  $A = \frac{P}{Q}$

$$\text{مرات في السنة} = 10 = \frac{2000}{200} = A$$

إشتقاق كمية الطلب الاقتصادية رياضياً في حالة ما يتم توريد العطلية على دفعات:

المفاهيم الأساسية في حالة توريد العطلية على دفعات هي:

1- معدل التوريد (أو الإنتاج) (P) وهو المعدل الذي يتم به تسليم الصنف إلى جهة الاستخدام.

2- معدل الاستخدام (E) وهو المعدل الذي يتم به استخدام الصنف إلى جهة الاستخدام وهو بمثابة معدل الطلب على الصنف. وفي ظل هذا النموذج لا بد أن تكون (P) أكبر من أو تساوي (E) ( $P \geq E$ ) وإلا ما نشأت عملية تراكم المخزون.

3- فترة التوريد (Y) وهي فترة التوريد التدريجي والتي يتم فيها أيضاً استخدام الصنف.

4- فترة الاستخدام فقط (G) وهي فترة الاستخدام التي يتم فيها استخدام المخزون المتراكم عندما لا يكون هناك توريد.

إشتقاق كمية الطلب الاقتصادية رياضياً (في حالة الشراء):

لاحظنا في تحديد الكمية المثلى للطلب أن هناك عاملين أساسيين يؤثران عليها وهي التكاليف الناشئة عن الاحتفاظ بالمخزون وتكاليف إعداد الطلبات. وأن سعر شراء الوحدة ثابت لا يتغير بتغير كمية الطلب (Q) بسبب أننا افترضنا عدم وجود خصم كمية لكميات الطلب (Q) الكبيرة، إلا أنه في الواقع العملي غالباً ما نجد أن سعر شراء الوحدة قد ينخفض إذا زادت كمية الطلب (Q) أكبر من كمية معينة (Q<sub>-</sub>) بسبب الاستفادة من خصم الكمية. وعلى ذلك فإنه يمكن إعادة صياغة العلاقة رقم (3) الخاصة بالتكاليف الكلية للمخزون (TC) لتأخذ في الاعتبار خصم الكمية وبذلك تكون التكاليف الكلية للمخزون في حالة وجود كمية معينة بالعلاقة التالية:

التكاليف الكلية للمخزون = تكاليف الاحتفاظ بالمخزون + تكاليف إعداد الطلبات + تكاليف شراء الوحدات

$$TC = THC + TOC + TIC \quad (13)$$

وتساوي تكلفة شراء الوحدة = سعر شراء الوحدة × الاحتياجات السنوية

$$TIC = I + D$$

ولتحديد الكمية الاقتصادية للشراء تتبع الخطوات التالية:

- 1- إحصاء (Q) حسب معادلة الكمية الاقتصادية رقم (5) باستخدام (CR) المعطاة.
- 2- حدد الفئة السعرية التي تقع بها تلك الكمية، أي التي تعد ممكنة بالنسبة لها.
- 3- إحصاء التكاليف الكلية السنوية للكمية الممكنة والكميات التي تقع في نقطة تخفيض السعر وذلك باستخدام المعادلة رقم (13).
- 4- اختر الكمية التي تقلل التكاليف السنوية، وهي تعتبر الكمية الاقتصادية للشراء (Q\*) مثال رقم (5) الكمية الاقتصادية في حالة الشراء:

بافتراض نفس البيانات الموجودة في المثال رقم (1) إلا أن المورد منح للمشروع أسعاراً تسمح بوجود تخفيض في السعر حسب الكمية المشتراة حيث كانت الأسعار كالتالي:

- 1- 10 دنانير للوحدة إذا كانت الكمية المشتراة في الطليقة أقل أو تساوي 250 وحدة.
  - 2- 9 دنانير للوحدة إذا كانت الكمية المشتراة في الطليقة أكبر من 250 وحدة.
- المطلوب: تحديد أ - الكمية المثلى للطلب. ب - التكاليف المثلى للمخزون. ج - العدد الأمثل لمرات الترتيب.

D = حجم الاستخدام السنوي

CR = تكلفة تخزين الوحدة

E = معدل الاستخدام

F = تكلفة إصدار أمر التوريد

P = معدل التوريد

مثال رقم (4):

يقوم أحد الأقسام في شركة صناعية بإنتاج صنف يتم استخدامه في قسم تال وكان معدل الإنتاج اليومي هو 160 وحدة بينما يستخدم القسم التالي هذا الصنف لإنتاج السلعة تامة الصنع بمعدل 80 وحدة يومياً. فإذا كان عدد أيام العمل السنوية 250 يوماً في السنة، إحصاء عدد المرات الواجب (المثلى) تشغيل هذا الصنف فيها القسم الأول. إعتبر أن تكلفة الاحتفاظ بالوحدة هي (8) دنانير/ سنة وأن تكاليف تجهيز القسم الأول لإنتاج صنف معين هي 200 دينار في المرة الواحدة. وكذلك إحصاء الحد الأقصى المتوقع للمخزون من الصنف في قسم التجميع.

الحل:

بما أن السؤال عن عدد مرات الإنتاج المثلى  $D = \frac{P}{Q}$  فإنه يجب تحديد قيمة كل من  $Q^*, D$

D = هي مقدار الاحتياجات السنوية في القسم المستخدم للصنف

$$D = 80 \times 250 = 20000$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DF}{CR(1-\frac{E}{P})}} = \sqrt{\frac{2(20000)(200)}{8(1-\frac{80}{160})}} = 1414$$

وعلى ذلك فإن عدد مرات تشغيل الصنف =  $A = \frac{D}{Q^*} = \frac{20000}{1414} = 14.1$  مرة تقريباً

وأقل تكلفة إنتاج وتخزين سنوياً TC هي:

$$TC = THC + TOC$$

$$TC = 8 \times 1/2 (1414) (1-80/160) + 20000/1414 \times 200$$

والحد الأقصى للمخزون = M

$$\text{وحدة } M = Q(1 - E/P) = (1 - 80/160) \times 1414$$

وهو أقل من كمية الشراء الاقتصادية والتي تساوي 1414 وحدة، وبلاحظنا أن هذا هو الرقم الذي يحسب على أساسه متوسط المخزون السنوي  $2/707 = 354$  وحدة تقريباً.

#### نقطة إعادة الطلب:

نقطة إعادة الطلب هي المستوى الذي إذا وصل إليه المخزون من الصنف يجب إصدار أمر شراء جديد بحيث يكون هذا الصنف عند ورود الطلبية الجديدة قد وصل إلى المخزون الاحتياطي. ويتوقف تحديد نقطة إعادة الطلب على عنصرين:

1- معدل الاستخدام اليومي (U).

2- فترة التوريد (T) وهي تساوي تاريخ وصول الطلبية الجديدة - تاريخ إصدار أمر التوريد.

ويتم حساب نقطة إعادة الطلب (S) كما يلي:

نقطة إعادة الطلب = كمية فترة التوريد + المخزون الاحتياطي  
حيث إن كمية فترة التوريد (L) = فترة التوريد × معدل الاستخدام

$$L = U \times T$$

ولتحديد موعد إعادة الطلب - أي متى يعاد الطلب؟ يمكن حساب ذلك بالمعادلة التالية:

موعد إعادة الطلب = (الرصيد الحالي - مستوى إعادة الطلب) ÷ معدل الاستخدام  
ولقد كان الافتراض في النموذج السابق (نموذج الكمية الاقتصادية للشراء) أن معدل الطلب على المخزون ثابت وليس متغيراً. إلا أنه في إطار الأسباب التي تستدعي الاحتفاظ بالمخزون أن الواقع العملي يتميز بالآتي:

1- الطلب غير معروف بالتأكيد مقدماً وإنما هو متذبذب ويخضع لمجموعة من المتغيرات الأخرى.

2- احتمالية تأخر وصول الكميات المطلوبة في مواعيدها.

3- لا يفي الموردون في العادة بالتزاماتهم وتواريخ التوريد.

وبالتالي وفي ظل مميزات الواقع العملي فإن المشروع يجد نفسه ملزماً للاحتفاظ بنسبة من المخزون يطلق عليه المخزون الاحتياطي (K) أو مخزون الأمان. حيث يمثل المخزون الاحتياطي كمية المخزون الذي يحتفظ به المشروع لمواجهة الظروف غير المؤكدة أو غير المتوقعة. ويلاحظ أن المخزون الاحتياطي له تأثير على التكلفة من جانبين؛ فهو من ناحية يؤدي إلى تخفيض تكلفة نفاد المخزون ولكنه يؤدي من ناحية أخرى إلى زيادة تكلفة الاحتفاظ بالمخزون، وبالتالي فإن حجم المخزون الاحتياطي يتأثر بهذين العاملين. وعليه فلا بد أن يكون حجم المخزون يحجب المشروع مشكلة نفاد المخزون وفي نفس الوقت تكاليف الاحتفاظ بالمخزون عند أدنى حد ممكن. ويلاحظ في ظل نظام أمر التوريد الثابت والكمية الثابتة للأمر أنه يتم إعادة إصدار أمر التوريد عند وصول المخزون لمستوى معين وبذلك نجد أن المخزون الاحتياطي يستخدم كعامل وقاية

#### الحل:

$$I_1 = 10 \text{ دنانير إذا كانت } (Q) \text{ أكبر من } 250 \text{ وحدة.}$$

$$I_2 = 9 \text{ دنانير إذا كانت } (Q) \text{ أصغر أو تساوي } 250 \text{ وحدة.}$$

$$Q = \text{كمية الطلب التي يتغير عندما السعر من } I_1 \text{ إلى } I_2.$$

$$TC = \text{التكاليف الكلية للكمية } Q \text{ للطلب باستخدام } I_2.$$

$$D = 2000 \text{ وحدة} \quad CR = 1 \text{ دينار} \quad F = 10 \text{ دنانير} \quad Q^* = 250 \text{ وحدة}$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DF}{CR}} = 200$$

$$Q^* = 200 < Q = 250$$

$$TC^-; TC^*$$

$$TC^* = Q^* \times CR + DI$$

$$TC^* = 200 \times 1 + 2000 \times 10 = 20200 \text{ ديناراً سنة}$$

$$TC^- = (Q - \frac{1}{2} CR) + (D/Q - X F) + (D \times I)$$

$$TC^- = (250/2 \times 1) + (2000/250 \times 10) + (2000 \times 9)$$

$$TC^- = 125 + 80 + 18000 = 18205 \text{ ديناراً سنة}$$

$$TC^-; TC^*$$

$$TC^* = 20200 > TC^- = 18205$$

وعلى ذلك فإن:

$$1- \text{الكمية الاقتصادية للشراء } Q^* = Q = 250 \text{ وحدة لكل طلبية}$$

$$ب- \text{التكاليف الكلية } F^* = F = 18205 \text{ ديناراً سنة}$$

$$\text{عدد مرات التوريد المثلى } 8 \text{ مرات/سنة} = 2000/250 = D/Q^* = A^*$$

2- تحديد الوقت المناسب للإصدار أمر الشراء في ظل كل من ظرفي التأكيد وعدم التأكيد (معي نظلي):

السؤال الذي طرح في السابق وهو كيف نراقب؟ وهذا السؤال ينشئ إلى سؤالين

فرضين هما - (1) كم نطلب؟ (تحديد كمية الطلب، ولقد قمنا بالإجابة على هذا السؤال) -

(2) متى نطلب؟ (تحديد مستوى إعادة الطلب) فإذا ما تم تحديد حجم الطلب في كل أمر توريد ولكل صنف فإن النقطة التالية تتمثل في تحديد وقت إصدار أمر التوريد أو بمعنى آخر متى تم إعادة الطلب؟

مثال رقم (6) إذا بلغ معدل الاستخدام الشهري في أحد المشروعات من صنف (300) وحدة وكانت فترة التوريد تمثل شهرين. وقد بلغ المخزون الاحتياطي (200) مين المطلوب تحديد نقطة إعادة الطلب. ولر فرضنا بأن الرصيد الحالي من نفس الصنف هو (1100) وحدة. فما هو موعد إعادة الطلب؟

الحل:

1- تحديد كمية فترة التوريد = فترة التوريد  $\times$  معدل الاستخدام

$$L = T \times U = 2 \times 300 = 100 \text{ وحدة}$$

إذا نقطة إعادة الطلب (S) =

$$S = L + K = 600 + 200 = 800 \text{ وحدة}$$

وبالتالي فإن إدارة المشتريات تبدأ في إصدار أمر التوريد عندما يصل رصيد المخزون من الصنف إلى 800 وحدة.

2- موعد إعادة الطلب = الرصيد الحالي - مستوى إعادة الطلب/ معدل الاستخدام

$$1 \text{ شهر} = 300/800 - 1100$$

يعني ذلك أنه بعد شهر يعاد الطلب على الصنف.

1- تحديد نقطة إعادة الطلب في حالة التأكد التام:

في حالة التأكد التام يكون معدل الاستخدام اليومي للمخزون (U) معروفاً بالتأكد ولا يخضع لأي احتمال، وكذلك يكون طول فترة التوريد (T) معروفاً بالتأكد وثابتاً من طلبية إلى أخرى. في مثل هذه الحالة من التأكد في قيمة كل من (T, U) وحدة التي تمثل معدل الاستخدام بالوحدات خلال فترة التوريد فإن نقطة إعادة الطلب  $T \times U$  وحدة وهو يساوي كمية فترة التوريد (L). أما بالنسبة لكمية المخزون الاحتياطي (K) فهو يساوي الصفر ولا يوجد في حالة التأكد. لأننا افترضنا من البداية أن كلا من (U) و (T) ثابتان وبالتالي لا يوجد احتمال لزيادتهما. وعلى ذلك تتحدد نقطة إعادة الطلب (S) بالوحدات في حالة التأكد بحاصل ضرب معدل الاستخدام اليومي (U) في طول فترة التوريد (T) وبذلك تكون

$$S = U \times T \quad (14)$$

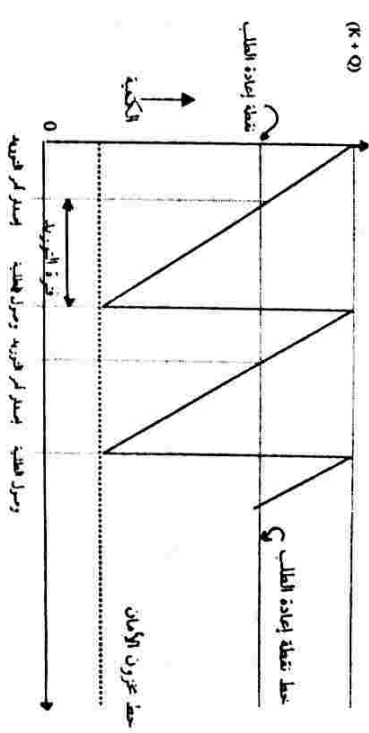
2- تحديد نقطة إعادة الطلب في ظل عدم التأكد:

عند حساب نقطة إعادة الطلب وجدنا أنها تساوي مجموع كمية فترة التوريد مع المخزون الاحتياطي. ولا حظنا أنه في حالة التأكد لا وجود للمخزون الاحتياطي ولكن في ظل ظروف عدم التأكد في كل من كمية الطلب وفترة التوريد فإن وجود المخزون

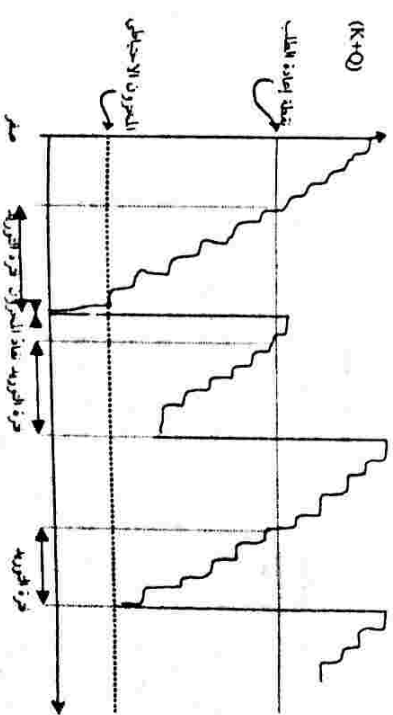
ضد نفاذ المخزون بعد إصدار أمر التوريد وقبل استلام هذه الكمية وتسمى الفترة من وقت إصدار أمر التوريد وحتى إنتام التوريد والتي قد يحدث خلالها نفاذ المخزون بفترة التوريد وفي حالة وجود المخزون الاحتياطي فإنه يدخل في تكوين نقطة إعادة الطلب. وهناك حالات يمكن معالجة مشكلة تحديد نقطة الطلب في إطارهما وهما:

1- حالة التأكد: حيث يكون معدل الطلب اليومي على المخزون معروفاً ومؤكداً خلال فترة التوريد، كما أن طول فترة التوريد بالأيام معروفة ومؤكد.

2- حالة عدم التأكد: حيث يتميز معدل الطلب على المخزون وطول فترة التوريد بالتغير والتذبذب الاحتمالي. ويوضح الشكل (15- 6) كلا من الحالتين.



شكل (15- 6) سلوك المخزون في حالة التأكد



شكل (16- 6) سلوك المخزون في حالة عدم التأكد

حيث (U) معدل الاستخدام خلال فترة التوريد

(Z) عدد الوحدات المعيارية (من جدول التوزيع الطبيعي)

الانحراف المعياري للطلب خلال فترة التوريد.

(T) طول فترة التوريد.

مثال رقم (7): إذا بلغ معدل الاستخدام الشهري في أحد المشروعات من أحد الأصناف (300) وحدة، فترة التوريد تعطل شهرين، ويرغب المشروع في تحقيق مستوى خدمة قدره 90%. فإذا كان الانحراف المعياري للطلب خلال فترة التوريد = 20 وحدة/يوم. المطلوب: حساب كمية المخزون الاحتياطي وكذلك نقطة إعادة الطلب.

الحل:

كمية المخزون الاحتياطي = عدد الانحرافات المعيارية  $\times$  الانحراف المعياري للطلب خلال فترة التوريد

$$K = Z \times \delta$$

من جدول الاحتمالات الطبيعية فإن قيمة Z عند مستوى خدمة 90% هي 1.28 و  $\delta = 20$  فإن

$$K = 1.28 \times 20 = 25.6 = 26 \text{ وحدة تقريباً}$$

إذا نقطة إعادة الطلب (S) = (معدل الاستخدام  $\times$  فترة التوريد) + المخزون الاحتياطي

$$S = U \times T + K$$

$$\text{وحدة واحدة} = 626 = 300 \times 2 + 26$$

أي عندما يصل المخزون إلى (626) وحدة تبدأ الإدارة المسؤولة عن الشراء بإصدار أمر توريد جديد.

من خلال العرض السابق لتحديد نقطة إعادة الطلب وجدنا أن الحاجة إلى وجود المخزون الاحتياطي تنشأ لعدم توازن الاستخدام الفعلي للصنف خلال فترة التوريد مع الاستخدام المتوقع. وطالما أن الاستخدام الفعلي يتوقف على معدل الاستخدام - الطلب وطول فترة التوريد، فإن الحاجة إلى المخزون الاحتياطي تظهر نتيجة لأحد الأسباب الآتية:

- 1- معدل الاستخدام أعلى من متوسط الاستخدام مع ثبات فترة التوريد.
- 2- فترة التوريد أطول من الفترة المتوقعة مع ثبات معدل الاستخدام.
- 3- زيادة كل من معدل الاستخدام وفترة التوريد عن الأرقام المتوقعة.

الاحتياطي يعتبر ضرورياً لمواجهة أي تقلبات قد تطرأ على كمية الطلب وفترة التوريد. والسؤال الآن: كيف يتم تقدير مقدار الاحتياطي المخزون اللازم؟ بالطبع كلما زادت الكمية الاحتياطية قل احتمال نفاذ المخزون، بمعنى زادت قدرة المشروع على تلبية الطلب حتى إذا زاد عن متوسط الاستخدام وتعرف تلك القدرة على تلبية الطلب بمستوى الخدمة. فإذا كان احتمال نفاذ المخزون هو 10% فإن ذلك يعني مستوى خدمة قدره 90%. ويمكن تحديد مستوى الخدمة بشكل تحكيمي أي أن المشروع يرغب في تحقيق مستوى خدمة معين مثلاً 95%. ولكن في حالة توافر معلومات عن تكلفة نفاذ المخزون يمكن تقدير المستوى المرغوب من الخدمة بشكل أدق باستخدام المعادلة التالية:

$$\text{احتمال النفاذ} = J + (N/H) / (N/H) \text{ حيث}$$

H تكاليف الاحتفاظ بوحدة لمدة سنة.

N = عدد مرات الشراء في السنة حسب الظروف الاقتصادية

J = تكلفة المجر وهي تكلفة نفاذ المخزون

وترغب أغلب المشروعات في تقليل احتمال نفاذ المخزون لما يترتب على النفاذ من مخاطر تؤثر على أداء المشروع، ولكن من الناحية الأخرى المبالية في تقليل احتمال النفاذ قد يترتب عليه الاحتفاظ بكميات زائدة من الاحتياطي وهي تمثل تكلفة إضافية. وبالتالي فإن السياسة المثلى لاحتياطي المخزون لدى إدارة المشروع هي ذلك المستوى أو الحد الذي يحقق أقل تكاليف كلية سنوية للمتعثرين والنفاذ معاً. ويمكن حساب قيمة المخزون الاحتياطي بالاعتماد على أسلوب الانحراف المعياري ويستخدم في هذا سياسة مستوى الخدمة. وبذلك تحدد كمية احتياطي المخزون بالمعادلة التالية:

$$\text{كمية احتياطي المخزون (K)} = \text{عدد الانحرافات المعيارية (Z)} + \text{قيمة الانحراف (}\delta\text{)}$$

ويمكن تحديد قيمة (Z) من خلال استخدام جدول الاحتمالات الطبيعية وفقاً لمستوى الخدمة المطلوب تحقيقه. كما يمكن تحديد الانحراف المعياري عن طريق المعادلة التالية:

$$\text{قيمة الانحراف المعياري} = \text{متوسط الانحرافات} \times 1.25$$

وبالتالي وما سبق عندما يضعف الطلب لمنحنى التوزيع الطبيعي فإنه يمكن التوصل إلى نقطة إعادة الطلب (S) بناء على المعادلة التالية:

نقطة إعادة الطلب بالوحدات = متوسط الطلب خلال فترة التوريد + المخزون الاحتياطي

$$S = U \times T + Z \delta$$

للمخزون يتم احتسابه بالفراض أن فترة التوريد تخضع للتوزيع المتعاد على النحو التالي :

$$K = x(U) \times (\delta)^t \quad \text{إحتياطي المخزون «K»}$$

وتكون نقطة الطلب ممثلة بالمعادلة التالية :

$$S = (U) \times (T^*) + Z \times (\delta)^t \quad (17)$$

حيث إن  $t$  (  $\delta$  ) الانحراف المعياري لفترة التوريد.

$(T^*)$  = متوسط فترة التوريد.

4 - حالة تغيير كل من معدل الاستخدام وفترة التوريد:

في مثل هذه الحالة يوضع كل من معدل الاستخدام وفترة التوريد في شكل توزيع إحصائي وبالتالي يقدر لكل فئة متوسط وانحراف معياري ويتم تحديد مقدار إحتياطي المخزون ونقطة إعادة الطلب كما يلي :

$$K = Z \sqrt{(T)^{-2} X(\delta)^{-2} U + (U)^{-2} X(\delta)^{-2} t}$$

$$S = (U)^{-} X(T)^{-} + Z \sqrt{(T)^{-2} X(\delta)^2 U + (U)^{-2} X(\delta 1)^{-2} t} \quad (18)$$

مثال رقم (8) :

في المثال رقم (7) لو فرضنا أن توزيع معدل الطلب اليومي يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط (300) وحدة/يوم وانحراف معياري 20 وحدة/يوم.

كما أن توزيع فترة التوريد يتبع التوزيع الطبيعي أيضاً بمتوسط 15 يوماً وانحراف معياري يومين. فالمطلوب : تحديد نقطة إعادة الطلب في الحالات المختلفة لدرجة التأكد في كل من معدل الطلب اليومي وفترة التوريد علماً بأن المشروع يرغب في تحقيق مستوى خدمة قدره 95%.

الحل :

$$\begin{aligned} \text{يوم } 2 = t(\delta)^{-}, \text{ يوم } 15 = t(T)^{-}, \text{ وحدة يوم } 20 = (\delta), \text{ وحدة/ يوم } 300 = (U) \\ \text{مستوى الخدمة } 95\% \text{ وبالتالي فإن } Z = 1.65 \end{aligned}$$

### أسئلة وتمارين: Questions and Exercises:

الأسئلة:

- س1- ما هو المقصود بالرقابة على المخزون؟ وما هي العناصر الأساسية التي يجب أن تتوفر في أي نظام إنتاجي لأي مشروع؟
- س2- لماذا نهتم بالمخزون؟ وما هي الدواعي الأساسية للاحتفاظ به؟
- س3- بين كلا مما يأتي:

وسوف نتناول الطريقة التي يتم بها تقدير إحتياطي المخزون ونقطة إعادة الطلب في الحالات الثلاث.

### 1 - حالة تغيير معدل الاستخدام مع ثبات فترة التوريد:

ببعضاً في حالة تغيير معدل الاستخدام مع ثبات فترة التوريد الحالة التي يكون فيها معدل الاستخدام خلال فترة التوريد أعلى من المتوسط. ففي مثل هذه الظروف فإن المشروع سيواجه بمعجز في الصنف، ويتوقف مقدار هذا المعجز على درجة زيادة معدل الاستخدام خلال فترة التوريد عن متوسط الاستخدام المتوقع. وفي حالة ثبات فترة التوريد ونشر معدل الطلب فإن متوسط فترة التوريد (T) مؤكد ولا يخضع لأي احتمالات وبالتالي فإن انحراف المعياري = صفر ولا تكون حالة عدم التأكد إلا بالنسبة لمعدل الطلب اليومي على المخزون (U) الذي يتبع التوزيع الطبيعي (U) وانحراف معياري (  $\delta$  ). وبالتالي فإن نقطة إعادة الطلب عندما يكون هناك تغير في معدل الاستخدام. وثبات فترة التوريد تحدد بالمعادلة التالية :

$$S = (U^*) \times (T) + Z \times (\delta^*) t \quad \dots \dots (16)$$

حيث (U\*) = متوسط معدل الاستخدام.

(T) = طول فترة التوريد.

(Z) = عدد الوحدات المعيارية من جدول التوزيع الطبيعي، حسب مستوى الخدمة المرغوب.

$u(\delta) =$  الانحراف المعياري للطلب خلال فترة التوريد.

ويجب أن يكون واضحاً أن هذا الرقم يتم تقديره عن طريق أخذ الجذر التربيعي لمجموع تباينات الطلب لكل فترة من فترات التوريد فلا يجوز إحصائياً جمع الانحراف المعياري ولكن يمكن جمع التباين.

### 3 - حالة ثبات معدل الاستخدام مع تغيير فترة التوريد:

كما لاحظنا في الأسباب التي تستدعي الاحتفاظ بالمخزون أن مميزات الواقع العملي احتمالية تأخر وصول الكميات المطلوبة في مواعيدها، خصوصاً إذا كانت تلك الأصناف يتم شراؤها من الخارج. وفي مثل هذه الحالات يتم جمع معلومات وبيانات عن فترات التوريد الفعلية السابقة وتحسب المتوسطات ويوضع توزيع إحصائي بصور شكل توزيع فترة التوريد. وفي هذه الحالة يكون تأثير الزيادة في فترة التوريد تماماً للزيادة في معدل الاستخدام الموضح من قبل وسوف نتعرض الشركة لمعجز في المخزون نظراً لأن مستوى المخزون يتناقص بمعدل ثابت نظراً لثبات معدل الاستخدام، ولكن الطلبة قد يتأخر عن التاريخ المحدد لها ولتجنب حدوث هذا المعجز أو تقليله يتم الاحتفاظ بحد أدنى



## المطلوب:

إستخدام نموذج التحليل الثلاثي (A,B,C) وتقييم هذه الأصناف إلى مجموعات حسب أهميتها للوقوف على المجموع ذات الأهمية النسبية الأولى في الدراسة والاهتمام.

س2- قدرت شركة المحركات العامة للسيارات حجم المبيعات السنوية من سياراتها أنه يبلغ 20000 سيارة. وهذه السيارات تكلف الشركة 2000 دينار للسيارة الواحدة. وكل طليقة تمدها الشركة تكلفتها 500 دينار، أما معدل تكلفة الاحتفاظ بما قيمته دينار من المخزون لمدة سنة فهي (25).

المطلوب: 1- تحديد كمية الطلب الاقتصادية (EOQ) لهذه الشركة. 2- حساب مجموع تكاليف المخزون وتكاليف الطليقات وتكاليف الاحتفاظ بالمخزون في السنة. 3- أوجد المدد الأمثل في السنة، والطول الأمثل للدورة.

س3- لو فرضنا أن الطلب السنوي لمصنع معين على سلعة معينة هو 2500 وحدة، وأن سعر شراء الوحدة من تلك السلعة هو أربعة دنانير، وأن تكلفة كل طليقة هي أربعة دنانير، ومعدل تكلفة الاحتفاظ بما قيمته دينار من المخزون هو (50) ديناراً، وأن هناك وقتاً يقضي بين طلب السلعة ووصولها قدره أسبوع.

المطلوب: حساب كمية الطلب الاقتصادية وتحديد نقطة إعادة الطلب، تحت هذه الظروف (قدرت للسنة 250 يوم/عمل).

س4- مكتبة النجاح لها خبرة 5 سنوات في مجال العمل، ويوجد لديها ساحة خاصة لإنتاج المقابض المدرسية للتلايد، وقد وجد أن الطلب السنوي على هذه المقابض هو بمعدل 6000 حقيبة في السنة، وأن إنتاج هذه المقابض هو بمعدل 8000 حقيبة في السنة. أما في ما يتعلق بالتكاليف، فإن كل حقيبة يتكلف إنتاجها 8 دنانير، ومعدل تكلفة الاحتفاظ بما قيمته دينار من المخزون لمدة سنة هو 20 ديناراً. وهناك تكلفة ثابتة عن كل تنبيلة قدرها 60 ديناراً.

المطلوب: تحديد الحجم الأمثل للإنتاج في كل تنبيلة ثم حساب أقل مجموع تكاليف يتحقق عند ذلك الحجم من الإنتاج، واحسب الطول الأمثل للدورة والمدد الأمثل للتنبيلات في السنة ثم الطول الأمثل لكل تنبيلة.

س5- إذا كان أحد المسؤولين بالمخازن الكبيرة يحصل على سلعة بسعر 40 ديناراً للوحدة الواحدة من المصنع وكان الطلب المقدر على هذه السلعة مساوياً 2000 وحدة سنوياً. ما هو الحجم الاقتصادي للطليقة إذا كانت كل طليقة الواحدة 15 ديناراً وكلفة التخزين للوحدة الواحدة سنوياً 0.2 ديناراً؟ وما هي الكلفة الكلية للتخزين؟

1- مخاطر وعيوب انخفاض مستوى المخزون.

ب - مخاطر وعيوب ارتفاع مستوى المخزون.

س4- حدد وناقش الأنواع المختلفة للمخزون وما هي التكاليف المرتبطة به.

س5- أكتب مذكرات مختصرة مع إعطاء بعض الأمثلة على النظام الذي يعرف بأسلوب التحليل الثلاثي (A, B, C).

س6- ما هو المقصود بكمية الطلب الاقتصادية؟ وما هي الفروض الأساسية لنموذج كمية الطلب الاقتصادية؟

المعايير:

س1- لقد كانت بيانات الاستخدام السنوي لأصناف المخزون لإحدى المشروعات الصناعية وعددها 20 صنفاً من العدد والأدوات. وتشمل هذه البيانات معدلات الاستخدام السنوي وقيمة تكلفة الوحدة من كل منها كما هي مبينة في الجدول التالي:

رقم الصنف	قيمة (تكلفة) الوحدة	معدل الاستخدام السنوي
1	0.3	2000
2	0.09	1000
3	0.9	1600
4	1.00	2500
5	0.2	1600
6	1.00	46000
7	1.4	79461
8	0.9	38500
9	0.3	3000
10	0.6	300000
11	0.26	100000
12	0.08	2000
13	3.00	200000
14	0.5	50000
15	1.00	12000
16	0.4	3000
17	1.00	1900
18	0.7	4000
19	0.5	100
20	0.36	600

## الفصل السابع

### نماذج صفوف الإنتظار

#### Waiting Lines Models (Queuing Theory)

##### المقدمة:

يعتبر هذا الأسلوب من أهم أساليب بحوث العمليات التي تستخدم في حل المشاكل التي تنشأ عندما يكون هناك أفراد أو وحدات ينتظرون تقديم خدمة معينة لهم، وأفراد أو وحدات يقومون بتأدية هذه الخدمات. ويوجد هناك العديد من المواقف في حياتنا العملية والتي تظهر فيها ظاهرة صفوف الانتظار، ومن أمثلة ذلك:

- إنتظار السيارات أمام محطات الوقود للتردد بالوقود، وانتظارها أمام إشارات المرور.
- طوابير الناس أمام الصيدليات لشراء الأدوية، وأمام دور العرض لقطع تذكرة الدخول إلى المسرح، وأمام المصارف لصفوف الشيكات وغيرها.
- وهذا النوع من الطوابير يشعر بها عامة الناس لأنها تمس حياتهم اليومية، ولكن يوجد هناك نوع آخر من الطوابير قد لا يشعر بها الشخص العادي ولكنها بمثابة الطوابير في واقع الأمر ومن أمثلة ذلك:

- المكالمات الهاتفية أمام قسم الهاتف، والرسائل الواردة إلى البريد.
- الآلات التي تنتظر عملية الصيانة داخل المصنع.
- العمال الذين ينتظرون داخل المصنع لتسلم أدوات العمل أو لتأدية عمل معين وغيرها.

##### تعريف صفوف الإنتظار:

يوجد العديد من التعاريف لصفوف الإنتظار ولكن يمكن تعريف صفوف الإنتظار كالتالي:

صفوف الإنتظار تتمثل في عدد الوحدات (السيارات، الناس، الرسائل، الآلات، العمال الخ) المستقلة في شكل طابور منتظرة خدمة معينة وذلك خلال فترة زمنية معينة.

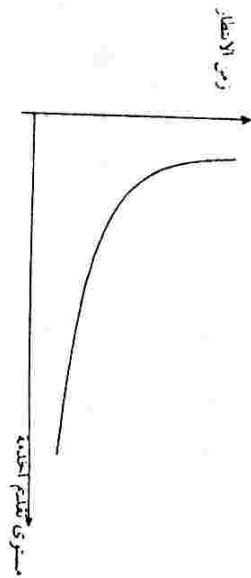
6- إذا كان الطلب على إحدى السلع يقدر بـ 9000 وحدة سنوياً وتكلفة الطلبية الواحدة سنوياً هي 100 دينار، وتكلفة التخزين وتكلفة الطلبية الواحدة سنوياً هي 100، وتكلفة التخزين هي 2.4 دينار سنوياً.

أوجد:

- 1- الحجم الاقتصادي للطلب.
- 2- عدد الطلبات.
- 3- الزمن بين الطلبتين.
- 4- التكلفة الكلية للطلبية إذا كانت تكلفة الواحدة دينار واحد.

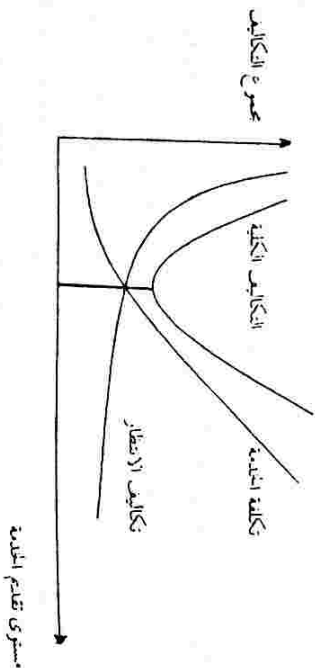
ولكن في حالة الزيادة في مستوى تقديم الخدمة، يؤدي إلى الإفراط من زمن الانتظار للأصليين، وهذا يعني الانخفاض في تكاليف الانتظار. وهذا مبين في الشكل التالي:

شكل (2 - 7) العلاقة بين زيادة مستوى تقديم الخدمة والانخفاض في زمن الانتظار



وتكون العلاقة بين التكاليف مبنية في الشكل التالي:

شكل (3 - 7) العلاقة بين تكلفة الخدمة وتكلفة الانتظار



### العناصر الأساسية في نظام صفوف الانتظار:

#### 1- توزيع أو معدل الوصول Arrival Distribution :

المقصود بهذا المصطلح، هو الكيفية التي يصل بها طالب الخدمة إلى مكان تقديم الخدمة، وهذا يمكن أن يكون:

- الوصول بمعدل ثابت: مثلاً وصول عشرين سيارة خلال فترة زمنية قدرها ساعة واحدة.

### صفوف الانتظار والتكلفة:

بعض المؤسسات العلمية تقوم بدراسة العلاقة بين صفوف الانتظار والتكلفة. وهي تسعى إلى تقليل التكاليف للوحدة الزمنية الواحدة التي يشتغلها نظام الطابور. المعادلة التالية تبين مجموع التكاليف للوحدة الزمنية الواحدة.

$$TC = SC + WC$$

حيث إن:

$TC$  = مجموع التكاليف خلال فترة زمنية معينة

$SC$  = تكاليف تقديم الخدمة خلال فترة زمنية معينة

$WC$  = تكاليف الانتظار

لو فرضنا أن تكلفة انتظار لوحة واحدة خلال فترة زمنية قدرها ساعة واحدة (في الطابور أو عند تقديم الخدمة) هي  $(C_w)$  وأن تلك اللوحة تنفق في النظام زمناً متوسطاً قدره  $(W)$  ساعة. فإن متوسط تكلفة الانتظار للوحدة الواحدة هي  $(WC_w)$ ، فإذا فرضنا أن هناك  $(\lambda)$  وحدة تصل إلى النظام في الساعة، وذلك في حالة التوازن. فإن:

$$WC = \lambda (WC_w) = (\lambda W) C_w$$

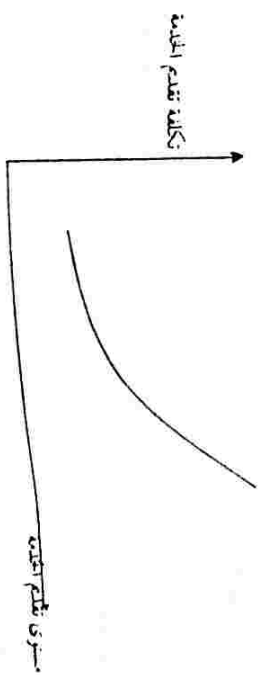
وحيث إن:

$$L = \lambda W$$

إذا:

$$WC = (\lambda W) C_w = L C_w$$

الآن يمكن توضيح بعض الأشكال التي تبين العلاقة بين التكاليف ببعضها البعض. فالعلاقة بين تكلفة تقديم الخدمة  $(SC)$  وتكلفة الانتظار  $(WC)$  تكون العلاقة بينهما علاقة عكسية؛ فكلما زاد مستوى تقديم الخدمة، فإن ذلك يعني زيادة في تكلفة تقديم الخدمة. وهذه العلاقة مبنية في الأشكال التالية:



شكل (1 - 7) العلاقة بين زيادة مستوى تقديم الخدمة وزيادة تكلفة تقديمها

- 1- عدداً محدوداً: كما هو الحال في بعض حجرات الانتظار مثل حجرة انتظار لغرض اختيار وتعيين العاملين أو حجرة انتظار المرضى لغرض الكشف من قبل الطبيب.
- ب- عدداً غير نهائي: مثل سيارات الأجرة في المحطة أو السيارات أثناء عبورها الجسر وغيرها.

#### 7- خصائص أخرى لنظام صفوف الانتظار Other System Characteristics :

- أ- بعض الزبائن قد يصلون إلى الطابور ولكنهم لا ينضمون إليه نظراً لأن هناك عدداً كبيراً من الأشخاص ينتظرون الخدمة لحظة وصولهم.
- ب- بعض الزبائن قد ينضمون إلى الطابور لفترة معينة ثم يغادرونه قبل حصولهم على الخدمة التي كانوا ينتظرونها.
- ج- بعض الزبائن قد ينضمون لطابور معين ثم يغادرونه لينضموا إلى طابور آخر تقدم فيه نفس الخدمة، لأنه أقل عدداً من الطابور الأول الذي كانوا فيه.

#### بعض الرموز الرياضية التي تستعمل في وصف نظام صفوف الانتظار:

$\lambda$  = متوسط عدد الوحدات التي تصل خلال فترة زمنية واحدة (متوسط معدل الوصول).

$\mu$  = متوسط عدد الوحدات التي يتم تقديم الخدمة لها في الوحدة الزمنية الواحدة وعن طريق مقدم خدمة واحد.

$n$  = عدد الوحدات في النظام (عدد الوحدات التي في الطابور + عدد الوحدات التي تقدم لها الخدمة).

$L$  = العدد المتوقع من الوحدات التي في النظام.

$Lq$  = العدد المتوقع من الوحدات التي في الطابور.

$w$  = الوقت المتوقع أن تنقته وحدة واحدة في النظام.

$wq$  = الوقت المتوقع أن تنقته وحدة واحدة في الطابور.

$\rho$  = معامل الاستخدام (احتمال أن يكون مقدم الخدمة مشغولاً).

#### نماذج صفوف الانتظار:

- توجد العديد من نماذج صفوف الانتظار المختلفة، التي يمكن اشتقاق بعض المعادلات الرياضية والقوانين المتعلقة بهذه النماذج. ومن بين هذه النماذج:
- 1- نموذج صفوف الانتظار ذات القناة الواحدة لتقديم الخدمة.
  - 2- نموذج صفوف الانتظار في حالة وجود أكثر من قناة واحدة لتقديم الخدمة.

- الوصول عشوائياً: يعني أن معدل الوصول يختلف من زمن لآخر. يمكن التعبير عن عملية معدل الوصول بطريقتين وهما:
- بعدد الوحدات التي تصل وتنظم للنظام في الوحدة الزمنية.
- الوقت الذي يمضي بين واصلتين متاليتين.

#### 2- توزيع وقت الخدمة Service Time Distribution :

المقصود بتوزيع الخدمة هو الكيفية التي تقدم بها الخدمة، وهذا قد يكون بشكل ثابت أو عشوائي. ويتر عن معدل الخدمة بطريقتين وهما:

- عدد الوحدات التي تقدم لها الخدمة في الوحدة الزمنية.
- الوقت المطلوب لتقديم الخدمة لزبون معين.

#### 3- طريقة تقديم الخدمة Service Discipline :

أ- القادم أولاً هو الذي تقدم له الخدمة أولاً (First in First Out - FIFO).

ب- القادم أخيراً يخرج أولاً (Last in First Out - LIFO). (مثلاً في حالة الصود بالمصعد).

ج- نظام الأسبقية (Priority) - تقدم الخدمة لطايلها وفقاً لحاجتهم الماسة (مثلاً ما يحدث في المستشفيات).

#### 4- مركز تقديم الخدمة Service Facility :

أ- مركز تقديم الخدمة الواحدة (Single Channel System).

ب- أكثر من مركز واحد لتقديم الخدمة (Multiple Channels System). طالب الخدمة تقدم له الخدمة من أي مركز من مراكز الخدمة المتعددة.

#### 5- عدد طالبي الخدمة Input Population :

أ- عدد طالبي الخدمة عدد محدود (Finite)، مثلاً عشر سيارات في أحد محطات الوقود أو خمس آلات داخل المصنع وغيرها.

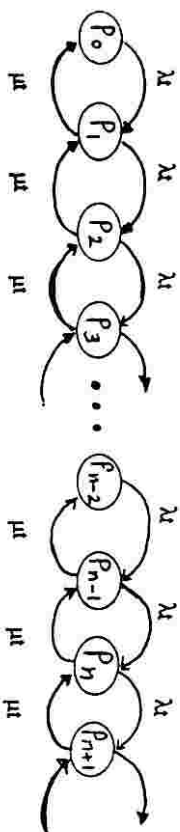
ب- عدد طالبي الخدمة عدد لا نهائي (Infinite)، مثلاً السيارات التي تأتي إلى محطات التزود بالوقود - فهل يعلم بعدد السيارات التي يمكن أن تتزود بالوقود؟

#### 6- طاقة النظام System Capacity :

طاقة النظام = عدد الوحدات التي توجد في الطابور + عدد الوحدات التي تقدم لها الخدمة.

ولكن هذا العدد قد يكون:

الشكل التالي بين عمليات الوصول والمغادرة (الميلاد والموت).  
(5-7) احتمالات عمليات الوصول والمغادرة



المعادلات الرياضية المتعلقة بهذا النموذج يمكن تلخيصها كالآتي:

الشكل (5-7) يبين عمليات الوصول والمغادرة لنظام معين، والاحتمالات المختلفة له من  $(P_0 - P_n)$  وذلك لوجود أعداد مختلفة من الوحدات في النظام، بينما الأسهم في هذا الشكل تشير إلى عمليات الانتقال من وضعية إلى أخرى، مثلاً السهم المتجه من  $P_0$  إلى  $P_1$  يشير إلى عملية التحول من وضعية عدم وجود وحدة واحدة في النظام إلى وضعية وحدة واحدة في النظام، وبالعكس. بينما السهم المتجه من  $P_1$  إلى  $P_0$  يشير إلى عملية التحول من وضعية وجود وحدة واحدة في النظام إلى الوضعية التي لا تكون فيها أية وحدة في النظام. وبتفسير آخر، فإن الأسهم تشير إلى عمليات الانضمام إلى ومغادرة النظام. وتشير  $\lambda_i$  إلى عملية انضمام وحدة واحدة إلى النظام في زمن قدره  $(t)$  الذي يفصل بين واصلتين متتاليتين. بينما  $\mu_i$  تشير إلى عملية مغادرة وحدة واحدة للنظام في زمن  $(t)$ . إذا أخذنا أية وضعية في النظام، مثلاً  $(n)$  بحيث  $(n = 0, 1, 2, 3, \dots)$ ، فإن عدد عمليات الوصول والمغادرة إلى هذه الوضعية وعلى الأمد الطويل يجب أن يكونا متساويين. وهذا ما يعرف بمعادلة التوازن (Balance Equation) ويمكن التعبير عن هذه المعادلة بالصورة التالية:

$$P_n \lambda_t + P_n \mu_t = P_{n-1} \lambda_t + P_{n+1} \mu_t \quad (1)$$

ومن خلال هذه المعادلة يمكن حساب الاحتمالات المختلفة:

إحتمال أن يكون مقدم الخدمة مشغولاً (معامل الاستخدام  $(P)$ ) = عدد مرات الوصول ÷ عدد مرات الخدمة

3- نموذج صفوف الانتظار ذات القناة الواحدة لتقديم الخدمة مع معلومة محدودة عن عدد الوحدات المتوقف أن تطلب الخدمة.

4- نموذج صفوف الانتظار ذات القناة الواحدة لتقديم الخدمة مع معلومة أن طول الطابور محدود.

5- نموذج صفوف الانتظار ذات القناة الواحدة لتقديم الخدمة مع معلومة عدم اتباع معدل تقديم الخدمة توزيع بواسون الاحتمالات.

6- نموذج صفوف الانتظار مع وجود عدد لا نهائي من مراكز تقديم الخدمة.

1- نموذج صفوف الانتظار ذات القناة الواحدة لتقديم الخدمة Single Channel Waiting Line Model with Pwason Arrivals and Exponential Service Time with FIFO Discipline

هذا النموذج يفترض وجود قناة واحدة لتقديم الخدمة لأية وحدة ترغب في الحصول على هذه الخدمة. ومن بين الافتراضات الأساسية لهذا النموذج ما يلي:

1- طاقة النظام غير النهائي.

2- عدد الوحدات التي تطلب الخدمة غير النهائية.

3- توزيع الوصول يتبع توزيع بواسون، ومعدل قدره  $(\lambda)$  في الوحدة الزمنية.

4- توزيع الخدمة يتبع التوزيع الأسّي (Exponential) بمعدل قدره  $(\mu)$  في الوحدة الزمنية.

5- يكون في هذا النموذج معدل الوصول أقل من معدل الخدمة أي بمعنى  $(\lambda < \mu)$ .

7- توجد هناك قناة واحدة لتقديم الخدمة.

8- هذا النموذج لا يسمح لعمليات الوصول إلى الطابور وعدم الانضمام إليه وكذلك الانضمام إليه ثم مغادرته قبل الحصول على الخدمة.

هذا النموذج يمكن توضيحه عن طريق (الشكل 4-7، الشكل 5-7).

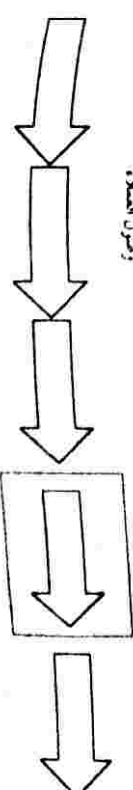
شكل (4-7) عملية الوصول والمغادرة بعد تقديم الخدمة

وصول العملاء

مكان قبة الخدمة

خروج العملاء من المكان

معد تقديم الخدمة



$$W = 1/\mu - \lambda$$

متوسط الوقت الذي تنفقه وحدة واحدة في الطابور

$$Wq = (\lambda/\mu)(1/\mu - \lambda)$$

مثال (1):

يوجد لدى أحد البنوك التجارية مكان واحد لتقديم بعض الخدمات للعملاء المترددين على هذا المصرف، وهذا البنك في الوقت الحالي يقوم بدراسة لرفع مستوى خدمة العملاء. وقد تمت ملاحظة قدوم العملاء إلى البنك فوجد أن متوسط معدل قدوم العملاء هو 10 عملاء/الساعة. بينما وقت تقديم الخدمة بمتوسط قدره 3 3/4 دقيقة للعميل الواحد.

المطلوب:

- 1- حساب احتمالات حالة التوازن للنظام في البنك.
- 2- حساب متوسط عدد العملاء في النظام وفي الطابور.
- 3- حساب متوسط الوقت الذي يستغرقه العميل في النظام وفي الطابور.

الحل:

1- قبل البدء في استخدام القوانين السابقة يجب تحديد قيمة متوسط عدد العملاء الذين يصلون إلى البنك ( $\lambda$ ) ومتوسط عدد العملاء الذين يجب أن يقدم لهم البنك الخدمة ( $\mu$ ) مع ملاحظة تحويل الدقائق إلى الساعات:

$$\lambda = 10 \text{ عميل/ساعة}$$

$$\mu = 60/(3 3/4) = 16 \text{ عميل/ساعة}$$

ومن خلال المعادلات السابقة يمكن حساب الاحتمالات المختلفة:

إحتمال أن يكون مقدم الخدمة مشغولاً (معامل الاستخدام ( $P_0$ ) = عدد مرات الوصول ÷ عدد مرات الخدمة

$$P = \lambda/\mu$$

$$P = 10/16 = 0.625$$

وهذا يعني أن احتمال نسبة الوقت الذي يكون فيه البنك مشغولاً ولو بعمل واحد على الأقل = 62.5% والتي تساوي أيضاً  $(1 - P_0)$ .

احتمال عدم وجود أي عميل في البنك

$$P_0 = 1 - \lambda/\mu$$

$$P = \lambda/\mu$$

إحتمال عدم وجود أي وحدة في النظام

$$P_0 = 1 - \lambda/\mu$$

إحتمال وجود سيارة واحدة في النظام

$$P_0 \lambda t = P_1 \mu t$$

$$P_1 = \lambda/\mu P_0$$

احتمال وجود سيارتين اثنتين في النظام

$$P_1 \lambda t + P_1 \mu t = P_0 \lambda t + P_2 \mu t$$

وبالتعويض عن ( $P_1$ ) بما يساويها فإن

$$P_2 = 1/\mu P_1 (\lambda + \mu) - P_0 \lambda$$

$$P_2 = (\lambda/\mu)^2 P_0$$

إحتمال وجود ثلاث سيارات في النظام

$$P_2 \lambda t + P_2 \mu t = P_1 \lambda t + P_3 \mu t$$

وبالتعويض عن ( $P_2$ ) بما يساويها فإن

$$P_3 = 1/\mu P_2 (\lambda + \mu) - P_1 \lambda$$

$$P_3 = (\lambda/\mu)^3 P_0$$

وصيغة عامة فإن احتمال وجود عدد ( $n$ ) سيارة في النظام

$$n \geq 1$$

$$P_n = (\lambda/\mu)^n P_0$$

متوسط عدد الوحدات في النظام

$$L = (\lambda/\mu)/1 - (\lambda/\mu)$$

متوسط عدد الوحدات في الطابور

$$Lq = (\lambda/\mu)^2/1 - (\lambda/\mu)$$

متوسط الوقت الذي تنفقه وحدة واحدة في النظام (وقت الانتظار في الطابور + وقت تقديم الخدمة)



$$W = 1/\mu - \lambda$$

$$W = 1/(16 - 10) = 0.167$$

متوسط الوقت الذي ينتفقه عميل واحد في الطابور

$$Wq = (\lambda/\mu)(1/\mu - \lambda)$$

$$Wq = (10/16)(1/(16 - 10)) = 0.104$$

ست دقائق تقريباً

## 2- نموذج صفوف الانتظار في حالة وجود أكثر من قناة واحدة لتقديم الخدمة Multiple Channels Waiting Line Model

ومن بين الافتراضات الأساسية لهذا النموذج ما يلي:

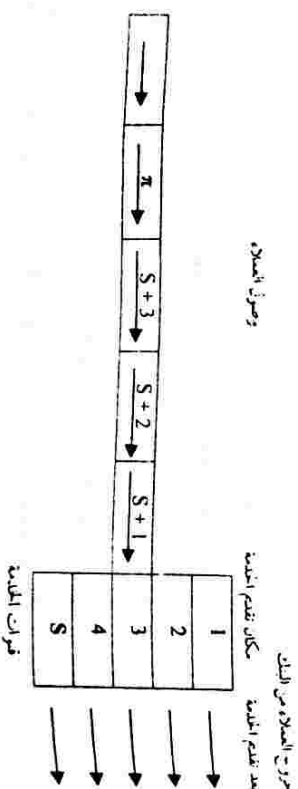
- 1- طاقة النظام غير النهائي.
- 2- عدد الوحدات التي تطلب الخدمة غير النهائية.
- 3- توزيع الوصول يتبع توزيع بواسون، وبمعدل قدره  $(\lambda)$  في الوحدة الزمنية، وذلك لكل قناة واحدة.
- 4- توزيع الخدمة يتبع التوزيع الأسّي (Exponential) بمعدل قدره  $(\mu)$  في الوحدة الزمنية.
- 5- يكون في هذا النموذج معدل الوصول أقل من معدل الخدمة للقناة الواحدة، مضموناً بعدد قنوات الخدمة، أي بمعنى  $(\lambda < S\mu)$ . بحيث  $(S)$  تشير إلى عدد قنوات الخدمة المتاحة.

6- طريقة تقديم الخدمة الذي يأتي أولاً تقدم له الخدمة أولاً.

7- يوجد هناك أكثر من قناة واحدة لتقديم الخدمة.

8- هذا النموذج لا يسمح لعمليات الوصول إلى الطابور وعدم الانضمام إليه وكذلك الانضمام إليه ثم مغادرته قبل الحصول على الخدمة.

شكل (6-7) عملية الوصول والمغادرة بعد تقديم الخدمة المتعددة القنوات



$$P_0 = 1 - 10/16 = 0.375$$

وهذا يعني أن احتمال عدم وجود أي عميل في البنك = 37.5% من الوقت. أي بمعنى آخر أن البنك سوف يكون خالياً تماماً من العملاء.

إحتمال وجود عميل واحد في البنك

$$P_1 = \lambda/\mu P_0$$

$$P_1 = (10/16)^1 \times 0.375 = 0.234 = 23.4\%$$

إحتمال وجود عميلين اثنين في البنك

$$P_2 = (\lambda/\mu)^2 P_0$$

$$P_2 = (10/16)^2 \times 0.375 = 0.146 = 14.6\%$$

إحتمال وجود ثلاثة عملاء في البنك

$$P_3 = (\lambda/\mu)^3 P_0$$

$$P_3 = (10/16)^3 \times 0.375 = 0.092 = 9.2\%$$

أما بالنسبة لاحتمال وجود ثلاثة عملاء أو أقل في هذا البنك، فإن ذلك يمكن حسابه بجمع كل الاحتمالات السابقة  $(P_0 + P_1 + P_2 + P_3)$ . والذي يمكن حسابه كالتالي:

$$0.375 + 0.234 + 0.146 + 0.092 = 0.847 = 84.75\%$$

-2-

متوسط عدد العملاء في البنك

$$L = (\lambda/\mu)/1 - (\lambda/\mu)$$

$$L = (10/16)/1 - (10/16) = 2.5 = 3 \text{ عملاء}$$

متوسط عدد العملاء في الطابور

$$Lq = (\lambda/\mu)^2/1 - (\lambda/\mu)$$

$$Lq = (10/16)^2/1 - (10/16) = 1.04 = 1$$

-3-

متوسط الوقت الذي ينتفقه عميل واحد في البنك (وقت الانتظار في الطابور + وقت تقديم الخدمة)

يمكن تحديد قيمة ( $P_0$ ) بواسطة الجدول المعدة لذلك أو بواسطة استخدام القانون

السابق .

$$P_0 = \sum_{n=0}^{S-1} (\lambda/\mu)^n / n! + (\lambda/\mu)^S / S! (1 - \lambda/\mu)$$

$$P_0 = \sum (15/5)^4 / 4 \times 3 \times 2 \times 1 + (15/5)^4 / 4 \times 3 \times 2 \times 1 (1 - 15/5) = 0.0377$$

$$P = \lambda/S\mu = 15/4 \times 5 = 15/20 = 0.75$$

في حالة ما تكون ( $n \leq S$ ) نستخدم القانون التالي :

$$P_n = (\lambda/\mu)^n / n! (P_0)$$

$$P_1 = (15/5)^1 / 1 (0.0377) = 0.1131$$

$$P_2 = (15/5)^2 / 2 \times 1 (0.0377) = 0.1697$$

$$P_3 = (15/5)^3 / (3 \times 2 \times 1) (0.0377) = 0.1697$$

في حالة ما تكون ( $n \geq S$ ) نستخدم القانون التالي :

$$P_n = (\lambda/\mu)^n / S! S^{n-S} (P_0)$$

$$P_4 = (15/5)^4 / (4 \times 3 \times 2 \times 1) (4)^{4-4} (0.0377) = 0.127$$

$$P_5 = (15/5)^5 / (5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) (5)^{5-4} (0.0377) = 0.019$$

$$P_6 = (15/5)^6 / (6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) (6)^{6-4} (0.0377) = 0.038$$

$$Lq = P_0 (\lambda/\mu)^S P / S! (1 - P)^2$$

$$Lq = 0.0377 (15/5)^4 15/20 / (4 \times 3 \times 2 \times 1) (1 - 15/20)^2 = 1.527 = \text{عمل}$$

2

$$L = Lq + \lambda/\mu$$

$$L = 1.527 + 15/5 = 4.527 = 5 \text{ عمل}$$

$$Wq = Lq/\mu$$

$$Wq = 1.527/15 = 0.1018 = 6 \text{ دقائق تقريباً}$$

$$W = Wq + 1/\mu$$

$$W = 0.1018 + 1/5 = 0.3018 = 18 \text{ دقيقة تقريباً}$$

معدلات حالة التوازن لهذا النموذج هي كالآتي :

$$P_0 = \sum_{n=0}^{S-1} (\lambda/\mu)^n / n! + (\lambda/\mu)^S / S! (1 - \lambda/\mu)$$

في حالة ما تكون ( $n \leq S$ ) نستخدم القانون التالي :

$$P_n = (\lambda/\mu)^n / n! (P_0)$$

في حالة ما تكون ( $n \geq S$ ) نستخدم القانون التالي :

$$P_n = (\lambda/\mu)^n / S! S^{n-S} (P_0)$$

$$L = Lq + \lambda/\mu$$

$$Lq = P_0 (\lambda/\mu)^S P / S! (1 - P)^2$$

$$W = Wq + 1/\mu$$

$$Wq = Lq/\mu$$

مثال (2) :

لو فرضنا أن معدل الوصول للعملاء للبنك السابق بمتوسط قدره (15) عميلاً/ساعة، وأن وقت تقديم الخدمة بمتوسط قدره (12) دقيقة للعميل الواحد، وباعتبار وجود أربعة أماكن لتقديم الخدمات المصرفية.

المطلوب : حساب احتمالات حالة التوازن.

الحل :

قبل البدء في استخدام القوانين السابقة يجب تحديد قيمة متوسط عدد العملاء الذين يصلون إلى البنك ( $\lambda$ ) ومتوسط عدد العملاء الذين يجب أن يقدم لهم البنك الخدمة ( $\mu$ ) مع ملاحظة تحويل الدقائق إلى الساعات

$$\lambda = 15 \text{ عميل/ساعة}$$

$$\mu = 60 / (12) = 5 \text{ عميل/ساعة}$$

كذلك فإن

$$\lambda < S \mu \quad 15 < (4 \times 5)$$

ومن خلال المعادلات السابقة يمكن حساب الاحتمالات المختلفة :

معامل الخدمة ( $\mu$ ) =  $30/1 = 30$  عميلاً في الشهر

معامل الاستخدام ( $\lambda/\mu$ ) = 0.2

$$P_0 = 1/1 + (4!/3!) 0.2 + (4!/2!) 0.2^2 + (4!/1!) 0.2^3 = (4!/0!) 0.2^4 = 0.398$$

$$P_1 = (4!/3!) \times (0.2)^1 \times (0.398) = 0.319 \text{ يوم}$$

$$P_2 = (4!/2!) \times (0.2)^2 \times (0.398) = 0.191 \text{ يوم}$$

$$P_3 = (4!/1!) \times (0.2)^3 \times (0.398) = 0.077 \text{ يوم}$$

$$P_4 = (4!/0!) \times (0.2)^4 \times (0.398) = 0.015 \text{ يوم}$$

$$L = 4 - 30/6(1 - 0.398) = 0.990$$

$$Lq = 0.990 - (1 - 0.398) = 0.388$$

$$W = 0.990/6(4 - 0.990) = 0.0548 = 1.6$$

وخلال فترة زمنية قدرها شهر فإن متوسط عدد العملاء الخاصين الذين يدخلون إلى

البنك يكون:

$$6(4 - 0.990) = 18.06 \text{ عميلاً خاصاً}$$

$$Wq = 18.06(0.0548 - 1/30) = 0.388 = 11.64$$

4 - نموذج صفوف الانتظار ذات القناة الواحدة لتقديم الخدمة مع معلومية أن طول الطابور محدود:

من خلال الحياة العملية نجد أن عدد الوحدات التي يمكن أن يستوعبها نظام الطابور يكون محدوداً، أي أن طاقة النظام محدودة. والسبب في ذلك يرجع إلى عدة أسباب منها الظروف المادية أو طبيعة الموقع أو نتيجة لطبيعة العمل وغيرها. مثلاً الفرقة التي ينتظر فيها المرضى لمقابلة الطبيب. هذه الحجرة تحتوي على عدد محدود من المقاعد، وبالتالي الزيادة في عدد المرضى عن عدد المقاعد ترسل إلى طبيب آخر أو مكان آخر لتلقي العلاج المناسب لذلك. وقد يكون هناك سبب آخر لمحدودية طول الطابور أو الوحدات وذلك من تلقاء نفسها لا تدخل الطابور بسبب طول. وفي هذه الحالة يمكن أن نرمر إلى أكبر عدد من الوحدات في النظام بالرمز (M). وبذلك يمكن تحديد احتمالات حالة التوازن كما يلي:

$$P_0 = 1 - \lambda/\mu = 1 - (\lambda/\mu)^{M+1}$$

$$P_n = (\lambda/\mu)^n (P_0)$$

3 - نموذج صفوف الانتظار ذات القناة الواحدة لتقديم الخدمة مع معلومية محدودة من عدد الوحدات المتوقع أن تطلب الخدمة:

في هذا النموذج يكون عدد الوحدات التي قد تنضم للبنك عدداً معروفاً ومحدوداً سلفاً، وذلك مثل الحالات الخاصة التي يتعامل بها بعض البنوك التجارية مع بعض العملاء في بعض الإجراءات الخاصة بهم. أو مثل العدد المعين من الآلات التي تعمل في أحد المصانع، والتي تصاب بالمطل بين الآلة والأخرى.

فإذا افترضنا أن عدد العملاء الذين يحتاجون إلى عمل خاص بالبنك، أو عدد الآلات المشابهة يرمز لها بالرمز (M)، وأن كل عميل خاص يحتاج إلى بعض الإجراءات بعمل (n) في اليوم، وأن هناك عدد (m) من العملاء الذين يحتاجون إلى عمل خاص في البنك. إذاً عدد العملاء المنتظر أو المتوقع دخول البنك أو النظام هو (M - n) عميل، ويكون المعدل الكلي للوصول يساوي  $\lambda(M - n)$ ، وذلك بانفراض وجود قناة واحدة لتقديم الخدمة، وأن توزيع الوصول يتبع توزيع بواسون، وأن وقت تقديم الخدمة يتبع التوزيع الأسّي، فإن معادلات حالة التوازن، تكون كالآتي:

$$P_0 = 1/1 + \sum_{n=1}^M (M!/n!)(\lambda/\mu)^n$$

$$P_n = \{M!/n!(M - n)!\} (\lambda/\mu)^n (P_0)$$

$$L = \sum_{n=1}^M n p_n = M - \lambda/\mu(1 - P_0)$$

$$Lq = \sum_{n=1}^M (n-1) p_n = L - (1 - P_0) = M - \lambda/\mu(1 - P_0) - (P_0 \lambda/\mu)$$

$$W = L/\lambda(M - n) = 1/\mu \{(M-1 - P_0) - (P_0 \lambda/\mu)\}$$

لكل طلب خدمة

$$Wq = W - 1/\mu$$

مثال (3):

نفرض أن البنك السابق له أربعة عملاء لهم حالة خاصة لتقديم الخدمات لهم لدى البنك، وأن كل عميل يطلب الخدمة الخاصة به بعمل ست مرات في الشهر، ويحتاج الشخص الذي يقدم الخدمة للعميل الخاص ليوم واحد لإنهاء خدمة العميل. ونسبح كل من معدل الوصول، ووقت تقديم الخدمة التوزيع الأسّي للاحتمالات.

المطلوب: حساب احتمالات حالة التوازن.

الحل:

$$\text{معدل الوصول } \lambda = 6 = \text{مرات في الشهر}$$

وقت تقديم الخدمة للعميل محدداً أو معروفاً من قبل (عشر دقائق للعميل)، أو أن يتبع ذلك الوقت التوزيع الطبيعي للاحتتمالات. إذا افترضنا أن الوقت المطلوب لتقديم الخدمة للعميل الواحد يساوي  $(1/\mu)$ ، وبانحراف  $(\sigma)^2$  وأن  $(\lambda/\mu < 1)$ ، من خلال هذه المعلومات فإن النظام يمكن تحليله رياضياً. وتكون احتمالات حالة التوازن كالتالي:

$P_0 = 1 - P$
$Lq = \lambda^2 \sigma^2 + P^2 / 2(1 - P)$
$Wq = Lq / \lambda$
$W = Wq + 1/\mu$
$L = \lambda W$
$L = Lq + P$

مثال (5):

يحتوي البنك التجاري على نافذة واحدة لتقديم الخدمات للعملاء. ولقد كان معدل وصول العملاء إلى البنك يتبع توزيع بواسون للاحتتمالات ومعدل قدره 5 عملاء في الساعة. أما معدل تقديم الخدمة ونظراً لاستخدام الحاسب الآلي لتلك الإجراءات، فإنه يتم بمعدل ثابت بواقع 13 عميلاً في الساعة.

المطلوب: حساب احتمالات حالة التوازن لهذا النظام.  
الحل:

$$P = \lambda / \mu = 5/13 = 0.385 < 1$$

$$P_0 = 1 - P = 1 - 0.385 = 0.615$$

$$Lq = \frac{5^2 2^2 + (0.385)^2}{2(1 - 0.385)} = 81.42$$

$$Wq = 81.42 / 5 = 16.28$$

$$W = 16.28 + 1/13 = 16.36$$

$$L = 5(16.36) = 81.80$$

6- نموذج صفوف الانتظار مع وجود عدد لا نهائي من مراكز تقديم الخدمة:

هذا النموذج يكون فيه عدد لا نهائي من المراكز التي تقدم الخدمة للعملاء. بمعنى لا يوجد وقت للانتظار سوى في الطابور أو في النظام. ويكون فيه معدل الوصول ومعدل

$$L = (\lambda/\mu / 1 - \lambda/\mu) \cdot (M + 1) (\lambda/\mu)^{M+1} / (1 - (\lambda/\mu)^{M+1})$$

$Lq = L - (1 - P_0)$
$Wq = Lq / \lambda (1 - P_0)$
$W = Lq / \lambda (1 - P_M)$

مثال (4):

مصنع متخصص في إصلاح المحركات الخاصة بالسيارات، تتوفر لديه ساحة تسع ثلاثة محركات (محرك في الصليح والأخران ينتظران)، والتي تصل عشوائياً ومعدل ثلاثة محركات في الأسبوع. ويتبع وقت تقديم الخدمة التوزيع الأسّي للاحتتمالات، ومعدل قدره 6 محركات في الأسبوع.

المطلوب:

- 1- حساب احتمالات حالة التوازن.
- 2- حساب متوسط عدد المحركات في النظام والطابور.
- 3- حساب متوسط الوقت الذي يقضيه المحرك الواحد في النظام وكذلك في الطابور.

الحل:

$$P_0 = (1 - 3/6) / 1 - (3/6)^4 = 0.667$$

$$P_1 = (3/6)^1 \times 0.667 = 0.334$$

$$P_2 = (3/6)^2 \times 0.667 = 0.167$$

$$P_3 = (3/6)^3 \times 0.667 = 0.083$$

$$L = (3/6 / 1 - 3/6) - (3 + 1) (3/6)^{3+1} / (1 - (3/6)^{3+1}) = 0.733$$

$$Lq = 0.733 - (1 - 0.667) = 0.400$$

$$\text{بزم } 1.015 = 0.400 / 3(1 - 0.667) = 0.145$$

$$\text{بزم } 1.865 = 0.266 = 0.733 / 3(1 - 0.083)$$

5- نموذج صفوف الانتظار ذات القناة الواحدة لتقديم الخدمة مع معلومية عدم اتباع معدل تقديم الخدمة توزيع بواسون للاحتتمالات:

لقد لاحظنا في الأمثلة السابقة أن تتبع معدل توزيع الخدمة توزيع بواسون للاحتتمالات في بعض الأحيان لا يتسنى مع بعض الحالات. مثلاً، في حالة ما يكون

$$P_1 = 0.01832 \times (4)^1 / 1! = 0.07328$$

$$P_2 = 0.01832 \times (4)^2 / 2! = 0.014656$$

$$P_3 = 0.01832 \times (4)^3 / 3! = 0.019541$$

$$P_4 = 0.01832 \times (4)^4 / 4! = 0.019541$$

المجموع الكلي = 0.62898

فإذا رغبتا بإيجاد احتمال أن يكون هناك 5 عملاء أو أكثر قدموا للشراء، فإن ذلك يتم كالآتي:

$$0.37102 = (0.62898 - 1)$$

#### استطلة وتعاريف

الاستطلة:

س 1- ما هو المقصود بالطابور؟ بين بعض الحالات التي نستطيع ذكر كلمة طابور عليها.

س 2- ما هي العناصر الأساسية لتحلي الطابور مع الشرح؟

س 3- ما هي التكاليف المرتبطة بصفوف الانتظار؟ مع التوضيح بالرسم.

س 4- أذكر الأنواع المختلفة من نماذج صفوف الانتظار؟ مع شرح نموذجين بالتفصيل.

التعاريف:

س 1- يقوم البنك التجاري في الوقت الحالي بدراسة لرفع مستوى خدمة العملاء. وقد تمت ملاحظة قدوم العملاء إلى البنك فوجد أن متوسط معدل قدوم العملاء هو 45 عميلاً في الساعة.

المطلوب: بواسطة استخدام نظرية صفوف الانتظار أوجد الاحتمالات التالية:

- 1- أوجد احتمال أن لا يأتي عملاء إلى البنك خلال فترة 6 دقائق.
- 2- أوجد احتمال وصول 5 عملاء خلال فترة 6 دقائق.
- 3- أوجد احتمال وصول أكثر من 5 عملاء خلال 6 دقائق.

س 2- مصنع صغير للمواد البلاستيكية يتوفر لديه مخزن واحد للمواد الأولية يقوم بالخدمة فيه أمين مخزن واحد، وقد تمت مراقبة وصول مندوبي الأقسام المختلفة بالمصنع الذين يحضرون إلى المخزن لطلب المواد فوجد أن وصولهم إلى المخزن يتم طبقاً لتوزيع

تقديم الخدمة يتبعان، توزيع بواسون للاحتمالات. معادلات حالة التوازن هي كالآتي:

$P = \lambda / \mu$
$P_n = e^P P^n / n! \quad n = 0, 1, 2, \dots$ ( $e = 2.71828$ )
$L = P$
$W = 1 / \mu$
$Lq = 0$
$Wq = 0$

مثال (6):

نفترض أنه في قسم الحوالات الأجنبية بأحد البنوك المركزية أن عدد المترددين الذين يدخلونه في الساعة هو 16 عميلاً، وأن الوقت الذي يتفقه العميل لإتمام عملية الشراء للعملة الأجنبية يتبع التوزيع الأسّي للاحتمالات، وبمعدل قدره 15 دقيقة، ونفترض أن هناك عدداً كبيراً من البائعين بما لا يسمح بتكوين طابور على الإطلاق.

المطلوب: حساب حالة التوازن لهذا النظام.

الحل:

$$\lambda = 16 \quad \mu = 60/15 = 4$$

$$P = \lambda / \mu = 16/4 = 4 \text{ عملاء}$$

بمعنى أنه في المتوسط يكون هناك أربعة عملاء في قسم الحوالات الأجنبية قدموا للشراء.

$$W = 1 / \mu = 1/4 \text{ ساعة}$$

بمعنى أن الوقت المتفق في النظام هو 15 دقيقة.

$$P_n = e^P P^n / n! = e^4 4^n / n!$$

$$(e = 2.71828)$$

من خلال القانون السابق أو من الجداول الخاصة يمكن إيجاد  $(e^4)$ ، وهي تساوي (0.1832) ومن ثم يمكن إيجاد قيم:  $(P_0, P_1, P_2, P_3, P_4)$ ، وهي كالآتي:

$$P_0 = 0.01832 \times (4)^0 / 0! = 0.01832$$

3- احسب متوسط الوقت الذي تستغرقه السيارة في النظام وفي الطابور.

س 6- شركة صغيرة لديها ورشة لإصلاح الآلات تتوفر لدى هذه الورشة في الوقت الحالي ثلاث آلات (الإثنين تنتظران وآلة في التصليح). ولقد كان معدل وصول الآلات لهذه الورشة (بواسون) بمتوسط قدره (24) آلة في الساعة. أما وقت تقديم الخدمة (بواسون) بمتوسط قدره  $(3\frac{1}{2})$  دقيقة للآلة الواحدة.

المطلوب:

- 1- حساب احتمالات حالة التوازن لهذا النظام، مع توضيح أنه في المتوسط أن الورشة سوف تخسر كل ساعة عشر آلات وذلك بسبب عدم وجود مكان للوقوف.
- 2- أوجد متوسط عدد الآلات في النظام، ومتوسط عدد الآلات في الطابور.
- س 7- يوجد لدى الشركة العامة للبريد والاتصالات محطة تقوم بتنفيذ واستقبال المكالمات التليفونية عن طريق مشغل واحد. فإذا كانت المكالمات التي يتم استقبالها، والتي يتم تنفيذها إلى الخارج، تتبع توزيع بواسون بمتوسط قدره 20 مكالمات و 16 مكالمات للزعمين من المكالمات على التوالي. يستطيع المشغل من تنفيذ (60) مكالمات في الساعة، وتوزيع الوقت لخدمة المكالمات هو توزيع أسّي.

المطلوب:

- 1- أوجد متوسط الوقت المعطل، ومتوسط الوقت المشغول بالنسبة لهذا المشغل.
- 2- ما هو متوسط عدد الوحدات التي في الطابور؟
- 3- ما هو متوسط وقت الانتظار للمكالمات؟
- س 8- يوجد لدى ورشة لإصلاح أجهزة الإذاعة المرئية ساحة تسع أربعة أجهزة سواء كانت هذه الأجهزة في حالة تقديم الخدمة لها، أو في حالة الانتظار لها تلك الخدمة. ومن خلال التجارب السابقة للورشة وجد أن معدل وصول العملاء إلى هذه الورشة (بواسون) بمعدل قدره 24 جهازاً في الساعة، ومعدل تقديم الخدمة (أسّي) بمتوسط قدره 3 دقائق للجهاز.

المطلوب:

- 1- أوجد احتمالات حالة التوازن.
- 2- ما هي نسبة العملاء المقفودين؟
- 3- إذا فرضنا أن متوسط الريح من كل عميل يقدر 10 دقائق، فما هي الفرصة الضائعة في كل ساعة؟
- 4- ما هو متوسط وقت الانتظار لكل عميل؟

بواسون بعدد 15 طلباً في الساعة، وكان وقت الخدمة لطلبي المواد من المخزون يتبع التوزيع الأسّي وقت الخدمة بعدد 1.5 طلباً في الدقيقة.

المطلوب:

- 1- متوسط عدد طلبي الخدمة المنتظرين لطلب المواد من المخزون.
- 2- حدد متوسط الوقت الكلي لكل طالب خدمة لكي ينتهي طلب المواد الخاص به.
- 3- حدد ما هي نسبة الوقت الذي يكون فيه أمين المخزون متوقفاً (عاطلاً عن العمل).
- 4- حدد معدل الاستخدام.
- 5- ما هو متوسط العدد المتوقع من الطلبات في الساعة الذي يقوم أمين المخزون بإبائهاه وتأجيله.

المطلوب:

- 1- إ احتمال أن لا يأتي عملاء إلى الجمعية خلال فترة 6 دقائق.
- 2- إ احتمال وصول 5 عملاء خلال فترة 6 دقائق.
- 3- إ احتمال وصول أكثر من 5 عملاء خلال 6 دقائق.
- س 4- محطة لتزويد السيارات بالوقود يوجد بداخلها مضخة واحدة، وقد وجد أن معدل وصول السيارات لها يتبع توزيع بواسون، للاحتمالات، وبمتوسط قدره 8 سيارات في الساعة الواحدة. ويتبع تقديم الخدمة التوزيع الأسّي بمتوسط قدره 5 دقائق للسيارة الواحدة.

المطلوب:

في النظام. حساب متوسط السيارات في الطابور. وما متوسط الوقت الذي تستغرقه السيارة في النظام ثم في الطابور؟

- س 5- لو فرضنا في الحال السابق أن معدل الوصول يتبع توزيع بواسون، ولكن بمتوسط قدره 16 سيارة في الساعة الواحدة. وأن متوسط وقت تقديم الخدمة قدره 5 دقائق للسيارة الواحدة. وكذلك وجود مضختين للوقود بدلاً من مضخة واحدة.

المطلوب:

- 1- حساب احتمالات حالة التوازن.
- 2- متوسط عدد السيارات في الطابور وفي النظام.



## الفصل الثامن

### نظرية المباريات (أو الألعاب)

#### Games Theory

#### المقدمة:

تعتبر نظرية المباريات أو الألعاب من أهم الإنجازات الرياضية في المجالات الاستراتيجية والاقتصادية في القرن العشرين. ويعتبر العالم الرياضي الفرنسي إميل بوريل أول من طرح فكرة النظرية سنة 1921، إلا أن الفضل الأكبر في إرساء أركان النظرية وبرهنت نتائجها الأساسية وإظهار الإمكانات الهائلة لها في التطبيق في المجالات الاقتصادية والعسكرية والإدارية يرجع إلى جون فون نيومان وأوسكار مورجانسترن John Von Neumann & Oskar Morgenstern. لقد كانت أول محاولة للعالم فون نيومان في تطبيقها بالمجال الاقتصادي في عام 1933 حيث قام بدراسة المشاكل المتعلقة بالاحتكار الثنائي Doubly وOligopoly، وشيتر تعبير «المباريات» (Game) إلى الحالات العامة للتنافس خلال زمن تحدث فيه بين جهتين أو أكثر لكل منهما عدد محدد أو غير محدد من الاستراتيجيات وتختصر نتائج المنافسة في مصفوفة تدعى مصفوفة الدفع Payoff باعتبارها دالة للسياسات المختلفة للمنافسين، وتعد تلك النتائج مقياساً للفعالية أو التأثير ويعبر عنها بالأموال أو النسبة المئوية أو المنفعة أو غيرها من مقاييس التأثير. وسوف نتناول في هذا الفصل بعض المفاهيم الاقتصادية المستخدمة في هذه النظرية وأنواع المباريات والاستراتيجيات الصرقة والاستراتيجيات المختلطة.

#### 1- المفاهيم الاقتصادية:

- 1- الخطة Strategy: هي مجموعة من البرامج التي يتم من خلالها تحقيق أهداف جهة معينة في تعظيم أرباحها أو تدني خسائرها.
- 2- عائد الخطة Pay off: يمثل العائد الصافي الذي تحققه الخطة. فإذا كان هدف الخطة تعظيم أرباح الوحدة الإنتاجية فإن عائد هذه الخطة يقاس بمقدار ما تحققه من

س 9- في أحد المطارات العالمية وجد أن الوقت اللازم لإجراء الخدمة للمطارات يتوزع توزيعاً أسياً وبمتوسط 20 دقيقة للمطائرة الواحدة، فإذا علمت أن معدل وصول الطائرات يتوزع حسب توزيع «بواسون» وبمعدل 15 طائرة كل 8 ساعات يومياً. ما هو احتمالية الوقت المأطّل كل يوم؟ وما هو عدد الطائرات في النظام؟ ومعدل الطائرات في صف الانتظار؟ ومعدل الزمن الذي تقضيه الطائرة في النظام؟ ما هو احتمال وجود عشر طائرات في النظام في أي وقت؟.

س 10- في أحد البنوك التجارية وجد مدير البنك أنه بالإمكان تعيين موظفين اثنين لأمانة الصندوق إذا كان معدل الخدمة يتوزع وفق التوزيع الأسّي وبمعدل 12 شخصاً في كل ربع ساعة، وكان معدل الوصول يقدر بـ 5 أشخاص كل ربع ساعة أيضاً وتبع توزيع بواسون، فأوجد كلاً من:  $(P_0, P_5, L, L_q, W, W_q)$ .

## 2- المباريات الثنائية ذات الحصة الصفرية **Two - Person Zero - Sum Games**:

هي تلك التي تتم بين طرفين متنافسين أو ذوي مصالح متعارضة، بحيث تكون الحصة الجبرية لعائد المباراة لكلا الطرفين معاً مساوية للصفر، أي أن مكاسب أحدهما لا بد وأن تساوي خسائر الآخر. ومن أمثلة ذلك، في مباريات كرة القدم، إذا ربح أحد الفريقين بهدفين، بمعنى أن الفريق الآخر كانت خسارته بمقدار هدفين. مثال آخر، إذا تنافس مشروران على حجم سوق ثابت مثلاً وفاز أحدهما بزيادة 10% في نصيبه في السوق فإن الآخر بالضرورة يكون قد خسر ما يعادل هذه النسبة من حصته في السوق.

### 3- المباريات الثنائية غير صفرية الحصة:

هي تلك التي تتم بين طرفين متنافسين أو ذوي مصالح متعارضة، بحيث تكون الحصة الجبرية لعائد المباراة لكلا الطرفين معاً غير مساوية للصفر، أي أن مكاسب أحدهما لا تساوي خسائر الآخر. ومن أمثلة ذلك، أنه قد يترتب على حملة إعلامية يقوم بها أحد مشورعين متنافسين بزيادة مبيعاته بنسبة معينة ولكن النقص في مبيعات المنافس يقل عن هذه النسبة أو يزيد عنها. وفي الحالة الأولى تكون المبيعات الكلية للمشورعين معاً قد زادت، وفي الحالة الثانية تكون المبيعات الكلية قد نقصت. وتكون الزيادة في أرباح المشروع الأول في الحالة الأولى أكبر من النقص في أرباح الثانية، بينما تكون أقل من هذا النقص في الحالة الثانية.

### 4- المباريات متعددة الأطراف:

إذا زاد عدد المشاركين فيها أو المتنافسين على عائدتها عن اثنين. وهي قد تكون ذات حصة صفرية، كما تكون ذات حصة غير صفرية موزعة أو سالبة.

## III - الاستراتيجيات الصرفة والاستراتيجيات المختلطة **Pure and Mixed Strategies**:

### إنراضات نظرية المباريات:

- 1- يكون المتنافسات على عائد المباريات دائماً في متنى الوعي والرشد والحصافة.
- 2- يجب أن يتوافر في كل منهما القدرة على التوقع بتصرفات المنافس، وحساب نتائجها، كما تؤثر في نصيبه في حصة المباراة. وبالتالي فليس هناك أي تصرفات عشوائية غير محسوبة من قبل أي من المنافسين.

ومن خلال هذا المنطلق قد يجد أحد المنافسين نفسه مضطراً إلى أن يلتزم بما يسمى، «استراتيجية صرفة **Pure Strategy**» في تصرفاته قبل المنافس الذي قد يضطر إلى اتباع استراتيجية صرفة هو الآخر أو اتباع «استراتيجية مختلطة **Mixed Strategy**». يمكن توضيح ذلك عن طريق المثال التالي:

ربح، أما إذا كان هدف الخطة زيادة قيمة المبيعات أو الإنتاج فإن عائد الخطة يمثل في مقدار المبيعات أو الإنتاج الممكن تحقيقه بعد تنفيذ الخطة.

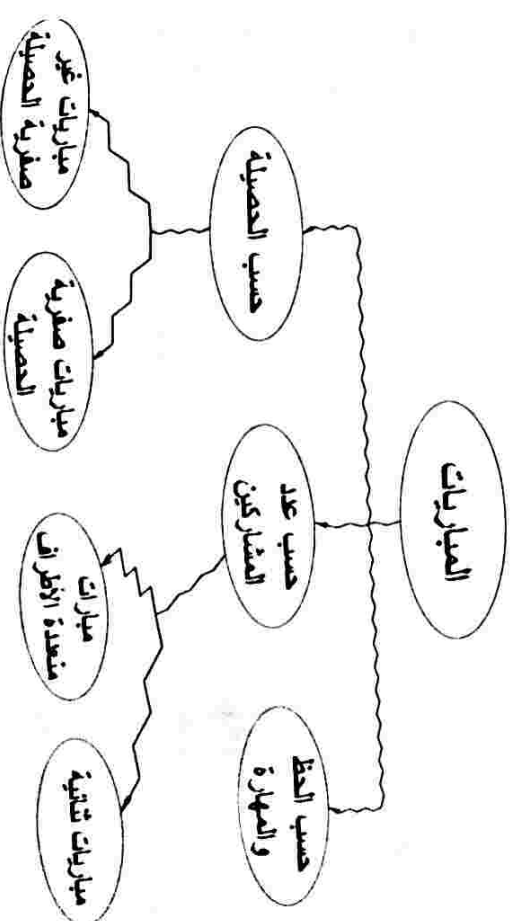
- 3- مصفوفة عوائد الخط **Pay off Matrix**: وهي عبارة عن المجموعة المكونة من العوائد التي يمكن للجهة المعنية (المتنافسة) تحقيقها في ظل استخدام مختلف الترتيبات من الخطط الممكنة لمقابلة خطط المنافس الآخر.

## II - تصنيفات المباريات:

يمكن تصنيف المباريات إلى التقسيمات المبينة في الشكل (1 - 8).

### 1- مباريات الحظ والمهارة:

تعد المباراة مباراة حظ متى ما اعتمدت نتيجة المباراة من هذا النوع على الحظ وحده ولا دخل للمهارة في تحديد نتيجة المباراة مثل سحب اليانصيب، ويقال على المباراة إنها مباراة مهارة متى ما اعتمدت نتيجة المباراة من هذا النوع على المهارة وحدها ولا دخل للحظ في تحديد نتيجة المباراة مثل الألعاب الرياضية الفردية. أما مباراة الحظ والمهارة فإنها تشير إلى اعتماد المباراة على امتزاج الحظ بالمهارة مثل المعارك الحربية والنسويق.



شكل (1 - 8) المباريات وتصنيفاتها

## المعلق:

يشمل كل عنصر في المصفوفة العائد على أحد المشروعين والذي بالضرورة يمثل خسارة للمشروع الآخر. فزيادة نصيب (ش1) بمعدل 4% في الصف الأول والمعمود الأول يعني من وجهة نظر (ش2) نقصاً في نصيبه بنفس النسبة، بينما نصيب (ش1) بمعدل 6% في الصف الثاني والمعمود الأول هو من وجهة نظر (ش2) زيادة في نصيبه بنفس المعدل.

ومن الواضح أنه إذا كانت إدارة (ش1) رشيقة في ظل هذه الظروف فإنه سوف تختار وبالضرورة البديل (I)، وذلك لأنه في كل الأحوال سوف تحصل على زيادة إضافية في نصيبها من السوق أدناه 4% وأقصاه 10%، وبالتالي فآقل ما يمكن أن تحصل عليه من مكاسب بهذا البديل هو إضافة 4% إلى نصيبها من السوق. أما البديل الثاني، فأقصى ما يمكن أن تضيفه إلى نصيبها من السوق فيه هو صفر بينما أدنى ما يمكن أن تحصل عليه هو فقدان 6% من نصيبها الحالي. ذلك إذا اختارت (ش2) البديل (X).

غير أنه طبقاً لافتراضات نظرية المباريات، إذا كان (ش1) رشيماً فلا يجوز افتراض أن (ش2) أقل منه رشداً. وهو لو اختار (X) فإن أقصى ما يمكن أن يفقده من السوق هو 4% بينما قد تحتاج له الفرصة في إضافة 6% من نصيبه الحالي. أما إذا اختار (Y) فأقصى ما يمكن أن يفقده من السوق 10%، بينما أفضل ما يمكن أن يحقق له بهذا البديل هو الاحتفاظ بنصيبه الحالي، وذلك بشرط اختيار (ش1) للبديل (II). ومن الواضح أيضاً في ظل هذه الظروف أنه يصبح من المتعين على (ش2) أن يختار البديل (X) ليقفل خسائره من حصة السوق إلى أقل ما يمكن.

وبعني ذلك أن فرص اختيار (ش1) بين البديلين أصبح مركزاً على البديل (I) بنسبة 100%، أو باحتمال واحد صحيح، بينما فرصة اختيار (II) بالنسبة للمشروع (ش1) أصبح احتمالها مساوياً للصفر. فالمشروع (ش1) سوف يختار (I) بصفة مطلقة منطلقاً، ويقلا في هذه الحالة إن المشروع (ش1) يتبع استراتيجية صرفة هي (1)، أي أن احتمال اختيار أحد البديلين هو واحد صحيح واحتمال اختيار البديل الآخر هو الصفر.

كذلك الأمر بالنسبة للمشروع (ش2). فهو سوف يختار هو الآخر (X) بصفة مطلقة، أي أنه مضطر أن يتبع الاستراتيجية الصرفة (1)، صفرًا للاقلال من النسبة التي يفقدها من السوق للمشروع (ش1) إلى أقل ما يمكن.

وبالتالي فمن الواضح أن الاستراتيجية الصرفة لمتنافس معين تعني اختياره لأحد البدائل بصفة مطلقة دون البدائل الأخرى، أو أن احتمال اختيار هذا البديل يصبح مساوياً للوحدة، بينما اختيار البدائل الأخرى احتمالها مساوية للصفر. وبالنسبة تكون الاستراتيجية متغلطة إذا كان احتمال اختيار أكثر من بديل يزيد عن الصفر. مثال ذلك الاستراتيجيات

## مثال (1):

نفرض أن هناك مشروعين (ش1، ش2) يتنافسان في سوق منتجات معين حيث يعرض كل منهما ثلاثة منتجات في السوق، وحيث تعتبر منتجات كل من المشروعين بدائل كاملة لمنتجات الآخر. ونفرض أن المشروع الأول (ش1)، نتيجة دراسة مستفيضة للسوق والتغير في أذواق المستهلكين، وجد أنه يستطيع تقديم منتج رابع متطور يمكن أن يؤدي إلى زيادة نصيبه من السوق بمقدار 10% من الحجم الكلي للسوق، إذا لم يتم المشروع الثاني (ش2) بتصرف مضاف. أما إذا قام المشروع الثاني (ش2) بتقديم منتج جديد هو الآخر، فإن الزيادة في نصيب المشروع الأول (ش1) من السوق بتقديم منتج سوف تقتصر على 4% فقط. في حين أنه إذا قام المشروع الثاني (ش2) بتقديم منتج جديد بينما لم يتم المشروع الأول بتقديم منتج فإن المشروع الأول يخسر 6% من نصيبه الحالي في السوق.

## المطلوب:

1- ما هي الاستراتيجية المفضلة والتي يجب على المشروع الأول (ش1) اتباعها في ظل هذه الظروف؟

2- ما هي استراتيجية المشروع الأول (ش1) المثلى لمقابلة نوايا المشروع الثاني (ش2) حتى تتصف إدارته بالرشد الاقتصادي والحصافة الإدارية؟

## الحل:

يمكن أن نلخص البيانات الموجودة في المثال (1) في شكل ما يسمى بمصفوفة عائد المباريات Pay - off Matrix كالآتي:

## جدول (1 - 8)

## مصفوفة عائد المباراة

ش 2

استراتيجية Y      استراتيجية X

ش 1	استراتيجية I	
	4/	10/
ش 1	استراتيجية II	
	6/	0/

من خلال هذا الجدول يتبين أن المشروع الأول (ش1) أمام خيارين أو استراتيجيتين، إما أن يقدم المنتج الجديد أو أن لا يقدم بهذا المنتج في السوق. ولنرمز للاستراتيجية الأولى (I) وللاستراتيجية الثانية (II). وفي المقابل يصبح أمام المشروع الثاني استراتيجيتان، إما أن يقدم بمنتج جديد، أو لا يقدم بهذا المنتج. ولنرمز للاستراتيجية الأولى بالرمز (X) وللاستراتيجية الثانية بالرمز (Y).

إلى 4% بدلاً من 10%. ويبلغ عائد المباراة من وجهة نظر (ش1) 4% بينما يبلغ من وجهة نظر (ش2) 4% لتكون الحصيلة الكلية مساوية للصفر. غير أنه يقال إن قيمة المباراة = 4% من وجهة نظر المستفيد منه.

وفي ما يلي عدد من الأمثلة تبن كيفية إيجاد نقطة التوازن:

مثال (2):

ص		ل	
ك	ل	ص	ل
ص	س يكسب أربع نقاط	س	2
ل	س يكسب نقطة	ل	4
ص	س يكسب ثلاث نقاط	ص	1
ل	س يكسب نقطة واحدة	ل	3

مثال (3):

ص		ل	
ك	ل	ص	ل
ص	س يكسب أربع نقاط	س	2
ل	س يكسب نقطة واحدة	ل	4
ص	س يكسب ثلاث نقاط	ص	1
ل	س يكسب نقطة واحدة	ل	3

مثال (4):

ص		ل	
ك	ل	ص	ل
ص	س يكسب أربع نقاط	س	2
ل	س يكسب نقطة واحدة	ل	4
ص	س يكسب ثلاث نقاط	ص	1
ل	س يكسب نقطة واحدة	ل	3

(نصف، نصف)، (ثلاثة أرباع، ربع)، (خمس، أسداس)، (ثلث، ثلثان)، (صفر)، وهكذا.

قانون أدنى الأفضيات وأقصى الأذنيات وقيمة المباراة:

حيث تعتبر مكاسب أحد المتنافسين في المباريات صفيرة الحصيلة بالضرورة معادلة وممثلة لخسائر المتنافس الآخر، فإننا نستطيع التوصل إلى الاستراتيجيات المعلى لكل من المتنافسين بتطبيق قانون أدنى الأفضيات وأقصى الأذنيات. نلاحظ في مثالنا السابق عندما يطبق المشروعان مبدأ الحيطة والحذر، أن أقل ما يتحقق من مكاسب للمشروع (ش1) بالبديل الأول (I) هو إضافة 4% لنصيبه من السوق، بينما أقل ما يتحقق له بالبديل (II) هو فقدان 6% من نصيبه من السوق. وهو إذا اتبع مبدأ الحيطة والحذر في تقييم مكاسب كل من البديلين، فهو يختار البديل الذي يحقق أقصى أذنيات المكاسب، أي الأقصى بين (+ 4%) و (- 6%)، وهو (+ 4%).

وحيث مكاسب (ش1) خسائر (ش2)، فإن (ش2) ينظر للأمر بنظرة عكسية. فهو يقيم البدائل على أساس حساب أقصى ما يمكن أن يتحقق له من خسائر عن كل منها، ثم يعمل على تقليل خسائره بعد ذلك إلى أقل ما يمكن. وهو لو اختار البديل الأول لكان أقصى خسائر يعني بها هو فقدان 4% من نصيبه من السوق، بينما لو اختار البديل الثاني لكان أقصى الخسائر هو فقدان 10% من هذا النصيب. وبذلك فهو يختار البديل الذي يحقق له أدنى أفضيات الخسائر، أي البديل الأول الذي يحقق له خسائر قدرها 4%. والجدول (2-8) يبين ذلك:

جدول (2-8)

ش2

أدنى مكاسب ش1		أقصى خسائر ش2	
استراتيجية X	استراتيجية Y	أقصى خسائر ش2	أقصى خسائر ش2
4	10	4	10
6	0	4	10

ينصح من الجدول (2-9) أن المشروعين يكرزان في حالة توازن عند تلاقي (I) مع (X)، حيث تكون أقصى أذنيات مكاسب (ش1) معادلة لأدنى أفضيات خسائر (ش2)، أي عندما يحصل (ش1) على 4% زيادة في نصيبه من السوق بتقديم المنتج الجديد ويقف (ش2) 4% من نصيبه بتقديم منتج جديد في مواجهة (ش1). لاحظ أنه إذا لم يتم (ش2) بتقديم المنتج فإنه يخسر 10% من نصيبه من السوق، وهو بتقديم المنتج يقلل الخسائر

الاحتمالات	استراتيجية Y	
	استراتيجية X	(1-H)
H	7/4	7/10
(1-P)	-7/6	0

استراتيجية I ش 1  
P  
استراتيجية II (1-P)

المطلوب: ما هي دالة العائد والاستراتيجيات المثلى لهذين المشروعين؟

الحل:

نرمز لاحتمال اختيار البديل الأول بالنسبة للمشروع (ش 1) P

نرمز لاحتمال اختيار البديل الثاني بالنسبة للمشروع (ش 2) (1 - P) لأن مجموع الاحتمالات = 1

نرمز لاحتمال اختيار البديل الأول بالنسبة للمشروع (ش 2) H

نرمز لاحتمال اختيار البديل الثاني بالنسبة للمشروع (ش 2) (1 - H)

ونفرض أن عائد المباراة بالنسبة للمشروع (ش 1) هو Z

$$Z = P[4(H) + 10(1-H)] + (1-P)[-6(H) + 0(1-H)]$$

$$Z = 4PH + 10P - 10PH - 6H + 6PH$$

$$Z = 10P - 6H$$

ونجد من المعادلة ( $Z = 10P - 6H$ ) أن المشروع (ش 1) يتحكم في قيمة P بينما المشروع (ش 2) يتحكم في قيمة H. ولا شك في أن (ش 1) ترغب في جعل قيمة P أكبر ما يمكن حتى تكون Z أكبر ما يمكن. بينما المشروع (ش 2) يرغب في جعل قيمة H أكبر ما يمكن لجعل قيمة Z أقل ما يمكن (أرباح ش 1) خسائر للمشروع (ش 2)، ذلك لأن معامل H في المعادلة السابقة مقدار سالب. وحيث إن:

$$0 \leq P \leq 1$$

$$0 \leq H \leq 1$$

فإن  $P = 1, H = 1$  تحقق غرض المشروعين. وبالتالي تكون استراتيجية (ش 1) هي (1، صفر) واستراتيجية (ش 2) هي (1، صفر) وكلاهما استراتيجيات صرفة.

ويطلق على المباراة التي تكون الاستراتيجيات المثلى للمتنافسين فيها استراتيجيات صرفة، مباراة محددة تحديداً كاملاً Strictly Determined.

	ص		
	ك	ل	هـ
ص	ص يكسب 3 نقاط	ص يكسب 2 نقطة	ص يكسب 2 نقطة
ن	ص يكسب نقطة واحدة	ص يكسب ثلاث نقاط	ص يكسب 4 نقاط
ع	ص لا يكسب أحد من اللاعبين	ص يكسب نقطة واحدة	ص يكسب 3 نقاط

ص	ك	ل	هـ
ص	3	2	-2
ن	1	-3	-4
ع	0	1	-3

	ص		
	ك	ل	هـ
ص	ص يكسب نقطة واحدة	ص يكسب 3 نقاط	ص يكسب نقطة واحدة
ن	ص يكسب 4 نقاط	لا يكسب أحد من اللاعبين	ص يكسب نقطة واحدة
ع	ص لا يكسب أحد من اللاعبين	ص يكسب 3 نقاط	ص يكسب نقطة واحدة

ص	ك	ل	هـ
ص	1	3	-1
ن	4	0	-1
ع	3	-1	-1

دالة العائد والاستراتيجيات المثلى:

يطلق على الاستراتيجية المثلى التي تحقق أقصى عائد للمباراة من وجهة نظر المستقبل منها الاستراتيجية المثلى، كما يطلق على الاستراتيجية التي تحقق أدنى تفسيحات من وجهة نظر المتضرر من المباراة الاستراتيجية المثلى أيضاً. والاستراتيجية المثلى هي تلك التي تؤدي إلى تقصية دالة العائد إلى أكبر ما يمكن في حالة المستقبل، وإلى تدنية دالة العائد إلى أقل ما يمكن في حالة المتضرر.

والاستراتيجية في حقيقة الأمر ما هي إلا التوزيع الاحتمالي لإقرار البدائل. وتكون الاستراتيجية مثلى إذا أمكن تحديد هذا التوزيع الاحتمالي بطريقة تؤدي إلى تحقيق الهدف المرغوب بأفضل صورة ممكنة إذا تم إقرار البدائل على أساس هذا التوزيع. يمكن توضيح ذلك عن طريق المثال (1) التالي:

حماقة ورشد (ش1) تقتضي أن تجعل  $H = \frac{1}{2}$ ، وبالتالي تتبع الاستراتيجية المختلطة (2/1)، لتكون قيمة المباراة محددة بخسارة قدرها 1% يتحملها (ش1) وهي مكاسب تفادى لتعيب ش2).

تعاد البدائل أمام المتنافسين والبدائل المهمة (المسيطر):

قد تعدد البدائل أمام المتنافسين في المباراة ولا تكون الاستراتيجيات المعلى استراتيجيات صرفة حيث يتحقق التوازن بعبادل أدنى الأفضيات مع أقصى الأذنيات. ويقتضي الأمر في ظل هذه الظروف أن يقوم كل متنافس بتحليل البدائل لاستبعاد غير الفعالم منها والإبقاء على البدائل المهمة Dominant قبل البحث عن الاستراتيجية المعلى التي يجب اتباعها. ويكون بديل ما مهماً على بديل أو بدائل أخرى من وجهة نظر متنافس معين إذا كان كل عنصر من عناصر متجه عائد هذا البديل في مصفوفة العائد يفوق على الأقل العنصر المعامل في متجه البديل أو البدائل الأخرى.

مثال (7):

جدول (3-8)

ش2

استراتيجية X	استراتيجية Y	استراتيجية W
5	-6	9
-4	8	-4
4	-7	8

أدنى مكاسب

ش 1

-6

-4

-7

من خلال هذا الجدول (3-8) يتفصح بأن البديل I يهيمن على البديل III من وجهة نظر (ش1) حيث:

$$5 > 4, -6 > -7, 9 > 8$$

وهذا يعني أنه إذا كان المشروع (ش1) له أن يختار بين البديلين فهو دائماً سوف يختار (I) لأنه يهيمن على (III). والأمر ليس كذلك بالطبع بين (I) و(II) فإذا كانت (5-4) >، فإن (8 < 6-). فإذا كان (I) يهيمن على (II) عندما يتبع (ش2) (X)، فإن (II) يهيمن على (I) عندما يتبع (ش2) (Y). وبالتالي لا يعتبر (I) مهماً على (II) من وجهة نظر (ش1). وبالتالي فهو وإن كان لن يعتد بوجود (III) عند تحديد استراتيجية المعلى، فهو لا بد وأن يعتد بوجود (I) و(II).

ونلاحظ أيضاً أن البديل (X) من وجهة نظر (ش2) يهيمن على البديل (W) له.

وليس من الضروري بالطبع أن تكون الاستراتيجيات المعلى استراتيجيات صرفة. فلو افترضنا مثلاً أن مصفوفة العائد بين (ش1)، (ش2) كانت كما في المثال (1):

ش2

استراتيجية X	استراتيجية Y		أدنى مكاسب ش1
	2	-4	
1 استراتيجية I	2	-4	-4
استراتيجية II	-6	8	-6
أقصى خسائر ش2	2	8	

من خلال الجدول السابق نجد أن أقصى أذنيات (ش1) (-4) يختلف عن أدنى أفضيات (ش2) (2) وإذا رغبتنا في تحديد عائد المباراة بالنسبة للمشروع (ش1) فإننا نجد أنه كالآتي:

$$\begin{aligned} Z &= P[(2H) + (-4)(1-H)] + (1-P)[(-6)(H) + 8(1-H)] \\ Z &= 16PH - 8P - 10H + 4 \\ Z &= 16(PH - 8/16P - 10/16H) + 4 \\ Z &= 16[(P - 10/16)(H - 8/16)] - 5 + 4 \\ -1 &= 16(P - 5/8)(H - \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

وكما هو الحال في المثال السابق فإن (ش1) يتحكم في P بينما (ش2) يتحكم في H، ويرغب الأول في تقصية Z بينما يرغب الثاني في تدنيها. ولنفرض أن (ش1) اختار  $P = 1$ ، فسوف يكون من المعطى في هذه الحالة أن يختار (ش2)  $H = 0$  حتى تتفادى خسائر (ش1) وتزداد قيمة Z السالبة بالنسبة للمشروع (ش1) (والمرجوة بالنسبة للمشروع (ش2) في المعادلة  $1 - 1/2)(H - 1/2) = 16(P - 5/8)$ . وإذا اختار (ش2) أي قيمة للمتغير  $\frac{1}{2} > H$  فإنه يصبح في صالح (ش1) اختيار أكبر قيمة ممكنة للمتغير P، أي جعل  $P = 1$  حتى نحصل على أكبر قيمة موزونة للسجل الأول في المعادلة  $1 - \frac{1}{2} = 16(P - 5/8)(H - \frac{1}{2})$ . وبالتالي فعلى (ش2) أن تجعل  $\frac{1}{2} \leq H$  حتى تضمن أن تكون محصلة هذا السجل سالبة أو صفراً.

إلا أن (ش1) لو وجد أن (ش2) اختيار قيمة  $\frac{1}{2} < H$  فيصبح من المعطى أن يختار هو الآخر قيمة  $5/8 < P$  حتى يتحول السجل الأول من المعادلة  $(H - 5/8)(P - 1/2) = 16$  لجعل قيمة  $\frac{1}{2} < H$  لتتحول قيمة السجل إلى مقدار سالب. والواقع أن الاستراتيجية المعلى للمشروع (ش1) في ظل رشد وحصافة (ش2) تقتضي أن يجعل  $P = 5/8$ ، وبالتالي الاستراتيجية المختلطة (3/8, 5/8)، كما أن الاستراتيجية المعلى للمشروع (ش2) في ظل



الاستراتيجيات المثلثية أقل عناء وتكلفة.

تحديد الاستراتيجيات المثلى بالبرمجة الخطية:

إن اللجوء إلى الحل بطريقة البرمجة الخطية يتم عند عدم وجود نقطة توازن بالمباراة (إذا كان حجم المباراة) وعند فشل طرق الحل السابقة في التوصل إلى حل المباراة؛ حيث إن هناك علاقة قوية بين مسألة البرمجة الخطية ونظرية المباراة لأن كل مباراة ذات مجموع صفري من الممكن تمثيلها بنموذج للبرمجة الخطية والمكس صحيح، إذ أن أقل برنامج خطي يمكن تمثيله بموضوع مباراة.

مثال (8):

المصفوفة التالية تبين مصفوفة المباراة

B		
3	2	2
2	3	1
1	2	3

المطلوب - حل المشكلة بواسطة طريقة البرمجة الخطية.

نفرض أن نسبة الوقت للخطط التي يلعبها A هي  $(X1, X2, X3)$  وأن نسبة الوقت للخطط التي يلعبها B هي  $(Y1, Y2, Y3)$ ، وأن قيمة المباراة هي  $V$  لذلك يمكن كتابة المصفوفة كالآتي:

	Y1	Y2	Y3
X1	3	2	2
X2	2	3	1
X3	1	2	3

$$X1 + X2 + X3 = 1$$

$$Y1 + Y2 + Y3 = 1$$

تبقى حالة لعب B الممورد الأول من الوقت  $(Y1)$  فإن قيمة المدفوعات للاعب A هي:

$$3X1 + 2X2 + X3$$

وبالمقابل إذا لعب A الصف الأول  $(X1)$  من الوقت فإن قيمة المدفوعات المتوقعة للاعب B هي:

ذلك مع تذكر أن الموائد الموجهة من وجهة نظر (ش1) هي عوائد سالبة من وجهة نظر (ش2). وبذلك نجد أن:

$$-5 > -9, 4 = 4, -4 > -8$$

وهذا يعني أنه إذا كان المشروع (ش2) له أن يختار بين  $(X, W)$  فهو سوف يختار  $(X)$  بصفة دائمة، وبالتالي فهو لن يتعد بوجود  $(W)$  عند تحديد استراتيجيته المثلى. وترتب على ذلك أن تصبح مصفوفة العائد الفعلية في هذه المباراة موضحة في الجدول (4 - 8)

جدول (4 - 8)

الاحتمالات	استراتيجية X		أدنى مكاسب ش1
	H	(1-H)	
استراتيجية I ش1	5	-6	-6
استراتيجية II (1-P)	-4	8	-4
أقصى خسائر	5	8	

وحيث يتفق أدنى الأفضليات مع أقصى الأذنيات، فإن المباراة ليس لها نقطة توازن مشتركة Saddle Point، وبالتالي تكون الاستراتيجيات المثلى فيها مختلفة، ويمكن أن نحدد جبرياً بالطريقة التي اتبعناها سابقاً كالآتي:

$$Z = P5(H) + (-6)(1-H) + (1-P)[-4(H) + 8(1-H)]$$

$$= 23(PH - 14/23P - 12/23H) + 8$$

$$= 23(P - 12/23)(H - 14/23) - 168/23 + 8$$

$$= 23(P - 12/23)(H - 14/23) + 16/23$$

وتكون الاستراتيجيات المثلى وقيمة المباريات من وجهة نظر كل من المشروعين كالآتي:

المشروع	ش1	ش2
الاستراتيجية المثلى	(12/23, 11/23)	(14/23, 9/23)
قيمة المباراة	16/23	-16/23

ومن الواضح أن استبعاد البدائل غير الفعالة والإبقاء على البدائل المهمة يسهل من أمر تحديد الاستراتيجيات المثلى للمتنافسين، وما لم يتم استبعاد  $(W)$  في المباراة بفعلية كبديل غير فعالة لأصبح أمر تحديد الاستراتيجية المثلى لكل من المشروعين بالغ التعقيد بالطريقة الجبرية. وسوف نرى في البند التالي أن البرمجة الخطية يمكن استخدامها بفعالية لتحديد الاستراتيجيات المثلى في حالة تعدد البدائل؛ فهي التي تجعل أمر تحديد

$$2X1^* + X2^* + X3^* \geq 1$$

$$X1^* + X2^* + X3^* = 1/V$$

وحيث إن A يستهدف زيادة V أي تقليل (1/V) فإنه يمكن صياغة المعادلات أعلاه

على الشكل التالي لحلها بالبرمجة الخطية:

$$\text{Min. } Z = X1^* + X2^* + X3^*$$

$$\text{S. T. } 3X1^* + 2X2^* + X3^* \geq 1$$

$$2X1^* + 3X2^* + 2X3^* \geq 1$$

$$X1^*, X2^*, X3^* \geq 0$$

أما ما يتوقعه B من المدفوعات فهي:

$$3Y1 + 2Y2 + 2Y3 \leq V$$

$$2Y1 + 3Y2 + Y3 \leq V$$

$$Y1 + 2Y2 + 3Y3 \leq V$$

$$Y1 + Y2 + Y3 = 1$$

ونفس ما اتبع بالنسبة للاعب A وبالقسمه على V ثم اعتبار  $Y^* = Y/V$  في طرفي المعادلات بحيث تصاغ المعادلات كالآتي:

$$\text{Max. } Z = Y1^* + Y2^* + Y3^*$$

$$\text{S. T. } 3Y1^* + 2Y2^* + 2Y3^* \leq 1$$

$$2Y1^* + 3Y2^* + Y3^* \leq 1$$

$$Y1^* + 2Y2^* + 3Y3^* \leq 1$$

$$Y1^*, Y2^*, Y3^* \geq 0$$

حيث إن  $Y1^* = Y1/V, Y2^* = Y2/V, Y3^* = Y3/V, Z = 1/V$

يمكن اعتبار استراتيجية اللاعب B هي المشكلة الثنائية (dual problem) لمشكلة البرمجة الخطية الأولية (primal problem) ولذلك يتم حل المشكلة بالنسبة لاستراتيجية B وفق طريقة السيمبلكس الثنائية (dual simplex method) كالآتي:

$$\text{Max. } Z = Y1^* + Y2^* + Y3^* - \alpha S1 - \alpha S2 - \alpha S3 = 0$$

$$3Y1^* + 2Y2^* + 2Y3^* + S1 = 1$$

$$2Y1^* + 3Y2^* + Y3^* + S2 = 1$$

$$Y1^* + 2Y2^* + 3Y3^* + S3 = 1$$

$$Y1^*, Y2^*, Y3^*, S1, S2, S3 \geq 0$$

$$3Y1 + 2Y2 + 2Y3$$

وحيث إن قيمة المباراة المرجبة تكون لصالح اللاعب A والسالبة لصالح B وأن أحد اللاعبين المشتركين في المباراة يحاول تحقيق هدفه بزيادة ربحه إذا كان ذلك ممكناً أو تقليل خسارته إذا لم يكن هناك مفر من الخسارة. وطبقاً إلى معياري (Max, Min) في الاستراتيجية المربكة، فإن اللاعب A سيحاول اختيار قيم  $X1$  التي تعظم أقل ربح متوقع له بينما اللاعب B يحاول اختيار قيم  $Y1$  التي تقلل أكبر خسارة متوقعة له. وعلى ذلك فإن اللاعب A سيجعل من قيمة المباراة V أكبر ما يمكن وبالمقابل فإن B سيحاول أن يجعل من V أقل ما يمكن. لذلك فإن ما يتوقعه A من المدفوعات من كل صنف من المصفوفة يجب أن يكون أكبر من V أو مساوياً لها وإلا فلن تحقق الخطة المتبعة هذه مما يستدعي إهمالها أو حذفها من حساباته، وبالمقابل فإن ما يتوقعه B من المدفوعات من كل عمود من أعمدته يجب أن يكون أصغر من قيمة V أو مساوياً لها لنفس السبب أعلاه.

ومن أجل تعيين استراتيجية اللاعب B نضع المتباينات التالية بين ما يتوقعه A من مدفوعات وفقاً لخطة ما يتوقعه A من مدفوعات إذا لعب B المورد الأول:

$$3X1 + 2X2 + X3 \geq V$$

أما إذا لعب B المورد الثاني  $2X1 + 3X2 + 2X3 \geq V$

$$2X1 + X2 + 2X3 \geq V$$

وبما أن مجموع نسب الوقت المصروف من قبل A للعب الصفوف الثلاثة يساوي وحدة واحدة:

$$X1 + X2 + X3 = 1$$

ويقسمه طرفي المتباينات أعلاه على V:

$$3X1/V + 2X2/V + X3/V \geq 1$$

$$2X1/V + 3X2/V + 2X3/V \geq 1$$

$$2X1/V + X2/V + 3X3/V \geq 1$$

$$X1/V + X2/V + X3/V = 1/V$$

ولإزالة القيمة V نعتبر  $X2^* = X2/V, X3^* = X3/V, X1^* = X1/V$  في المعادلات أعلاه

$$3X1^* + 2X2^* + X3^* \geq 1$$

$$2X1^* + 3X2^* + 2X3^* \geq 1$$

$$Z = 65/147 \quad V = 1/Z \quad V = 147/65$$

$$V = 2.26$$

$$Y1^* = 145/441 \quad Y1 = V^* \quad Y1^* = 0.3^* \quad 2.26 = 0.67$$

$$Y2^* = 2/21 \quad Y2 = 0.095^* \quad 2.26 = 0.21$$

$$Y1^* = 18/91 \quad Y3 = 0.197^* \quad 2.26 = 0.44$$

أما قيمة المشكلة الأولية Primal Problem من الحل الأمثل فتكون كالآتي :

$$X1^* = 7/21 \quad X1 = X1^* \quad V = 0.67$$

$$X2^* = 1/13 \quad X2 = X2^* \quad V = 0.17$$

$$X3^* = 14/91 \quad X3 = X3^* \quad V = 0.35$$

### أسئلة وتمارين

الأسئلة :

س 1- ما هو المقصود بنظرية المباراة؟ وما هي المجالات التي تستخدم فيها؟

س 2- أذكر التصنيفات المختلفة لنظرية المباراة.

س 3- ما هو المقصود بكل من :

1- الاستراتيجيات الصرفة والمختلطة.

2- المباراة صفرية الحاصلة، دالة عائد المباراة.

التمارين :

A, B  
س 1- إذا توفرت لديك المعطوفات التالية، أوجد السياسة المثلى للاعبان A, B ومقدار المباراة.

: 2

: 1

اللاعب A

اللاعب B

اللاعب A	اللاعب B
-9	5
6	-7

اللاعب A

اللاعب B

اللاعب A	اللاعب B
8	2
6	5
7	3
-4	

### الجدول المبدي (8-5)

	Y1*	Y2*	Y3*	S1	S2	S3	RHS
S1	3	2	2	1	0	0	1
S2	2	3	1	0	1	0	1
S3	1	2	3	0	0	1	1
Z	0	0	0	0	0	0	0
C-Z	1	1	1	0	0	0	

### الجدول الأول (8-6)

	Y1*	Y2*	Y3*	S1	S2	S3	RHS
Y1*	1	2/3	2/3	1/3	0	0	1/3
S2	0	5/3	-1/3	-2/3	1	0	1/3
S1	0	4/3	7/3	-1/3	0	1	2/3
Z	1	2/3	2/3	1/3	0	0	1/3
C-Z	0	1/3	1/3	-1/3	0	0	

### الجدول الثاني (8-7)

	Y1*	Y2*	Y3*	S1	S2	S3	RHS
Y1*	1	22/4	0	9/2	0	-2/7	3/7
S2	0	39/4	0	13/21	1	1/7	9/2
Y3*	0	4/7	1	-1/7	0	3/7	2/7
Z	1	7/4	0	6/12	0	1/7	9/2
C-Z	0	3/4	0	-6/12	0	-1/7	

### جدول الحل الأمثل (8-8)

	Y1*	Y2*	Y3*	S1	S2	S3	RHS
Y1*	1	0	0	-4/63	-22/21	-100/273	145/441
Y2*	0	1	0	1/3	7/13	1/13	2/21
Y3*	0	0	1	-7/21	-4/13	35/91	18/91
Z	1	1	1	7/21	4/3	14/91	65/147
C-Z	0	0	0	-7/21	-4/3	-14/19	

:2

:1

## قائمة المراجع أو المصادر

### References

#### • المراجع العربية Arabic Reference

- 1- د. محمود سلامة، الطرق الكمية في إدارة الأعمال، بحوث العمليات.
- 2- 1. سليمان محمد مرجان: إدارة العمليات الإنتاجية - دراسات تحليلية للعمليات الإنتاجية في المشروعات الصناعية، غريان، منشورات كلية المحاسبة، 1993.
- 3- د. عبد الحي مرعي، المعلومات المحاسبية وبحوث العمليات في اتخاذ القرارات - الدار الجامعية 1988.
- 4- د. زياد عبد الكريم القاضي، وآخرون، بحوث العمليات، دار المستقبل للنشر والتوزيع، عمان - الأردن، 1990.
- 5- د. نظيمة عبد العظيم خالد، إدارة المشتريات والمخازن، القاهرة: الدار العربية للنشر والتوزيع، 1993.
- 6- د. مجدي عصارة، وآخرون، محاسبة التكاليف الفنية، منشورات كلية المحاسبة - غريان، 1992.
- 7- د. منعم جلوب زمرير، إدارة العمليات الإنتاجية، طرابلس: منشورات الجامعة المفتوحة، 1992.
- 8- د. جمعة خليفة الحاسي، وآخرون، المحاسبة المتوسطة، بيروت: دار النهضة العربية للطباعة والنشر، 1996.
- 9- فالتر ميجس، روبرت ميجس، المحاسبة المالية، ترجمة وتحرير د. وصفي عبد الفتاح أبو المكارم، سلطان بن محمد السلطان، محمد هاشم البدوي، دار المريخ للنشر، 1988.
- 10- د. محمد هادي المدنان، المدخل في المحاسبة المالية: أصولها، مبادئها، تطبيقاتها، طرابلس: منشورات الجامعة المفتوحة - الجزء الثاني.
- 11- د. محمد محمد كبير، أساسيات بحوث العمليات، نماذج وتطبيقات، غريان: منشورات كلية المحاسبة، 1992.

اللاعب B		اللاعب A	
8	14 -	4	-4
18	16	20	-6
8			-10

اللاعب B		اللاعب A	
10		12	
-3		-8	
13		14	

س 2- أوجد الاستراتيجيات المثلى وقيمة المباراة للمصفوفة التالية :

:2

:1

اللاعب B		اللاعب A	
55		19 -	
-37		46	

اللاعب B		اللاعب A	
15	19	12	18
28	17	15	16
10	-14	13	17
28	19	15	18

- 27- د. سمير علام، إدارة الموارد والرقابة على المخزون، (القاهرة: مركز التعليم المفتوح، جامعة القاهرة، 1994.
- 28- د. بسمان فيصل محجوب، إلتصار توفيق اليزنكي، استخدام نظام نقطة الطلب، كمية الطالب (S, Q) في التخطيط والسيطرة على المخزون من الأدوات الاحتياطية السريعة الحركة (دراسة تطبيقية)، عمان: المجلة العربية للإدارة، المجلد الرابع عشر، خريف 1995، ص 143.
- 29- د. محمد توفيق ماضي، د. إسماعيل السيد، إدارة المواد والإمداد، الإسكندرية: الدار الجامعية طبع - نشر - توزيع 2000/1999.
- 30- د. طلبة زين الدين: بحوث العمليات، (الأساس الرياضي والإحصائي ومجالات التطبيق) (القاهرة، مكتبة عين شمس، 1998).
- 31- د. عبد الغفار حنفي، إدارة المواد والإمداد والرقابة على المخزون بالمستودعات، بيروت: الدار الجامعية للطباعة والنشر، 1998.
- 32- د. محمد صالح الحناوي، د. محمد توفيق ماضي، تخطيط ومراقبة الإنتاج- مدخل بحوث العمليات الإسكندرية: الدار الجامعية، 1993).
- 33- حمدي أ. طه، مقدمة في بحوث العمليات، ترجمة. د. أحمد حسين علي حسين، السعودية: دار المريخ. 1996.
- 34- د. محمد توفيق ماضي، إدارة الإنتاج والعمليات، الدار الجامعية، 1996.
- 35- أ. د. محمد عبد المال النعيمي وآخرون، بحوث العمليات، الأردن: دار وائل للطباعة والنشر، الطبعة الأولى، 1999.

• المراجع الأجنبية English Reference:

- 1- Burton J. A., Effective Warehousing, 3rd Ed, Macdonald Evans LTD, 1981, p. 8.
- 2- Betnel; Atwater; Smith; and Stackman, Industrial Organization and Management.
- 3- HAMDY A. TAHA, OPERATIONS RESEARCH, Singapore: Macmillan Publishing Company, 1992.

- 12- د. السيد ناجي، إدارة المشتريات والمخازن - المبادئ العملية والتطبيق العملي، القاهرة: دار الثقافة العربية، 1991.
- 13- د. جميل أحمد توفيق، علي شريف، الإدارة المالية، بيروت: دار النهضة العربية للطباعة والنشر، 1980.
- 14- د. جلال محمد بكير، الإدارة العلمية للمشتريات والمخازن، مكتبة عين شمس.
- 15- عصمت حسين جعفر، الإدارة العلمية للمخزون والمخازن والمشتريات، القاهرة: مكتبة الأنجلو المصرية.
- 16- د. يسرى خضر إسماعيل، التمويل والإدارة المالية، القاهرة: دار النهضة العربية.
- 17- د. حمدي طه، مقدمة في بحوث العمليات تعريب د. أحمد حسين علي حسين، الرياض: دار المريخ للنشر.
- 18- د. أحمد سرور محمد، إدارة الإنتاج والعمليات، القاهرة: مكتبة عين شمس، 1990.
- 19- د. علي عبد السلام الممرازى، بحوث العمليات في مجال الإنتاج والتخزين والنقل، القاهرة: دار النهضة العربية.
- 20- د. محمود محمد المنصوري، عبد الجليل آدم المنصوري، الأساليب الكمية لاتخاذ القرارات الإدارية، بنغازي: المعهد العالي للمعلوم الإدارية والمالية، 1989.
- 21- د. عبد الحميد مصطفى أبو ناعم، إدارة رأس المال العامل، الدار العربية للنشر والتوزيع، 1993.
- 22- د. محمود محمد المنصوري، أساليب بحوث العمليات واستخدامها في ترشيد عملية اتخاذ القرارات، الطبعة الأولى، بنغازي: منشورات مركز بحوث العلوم الاقتصادية، 1996.
- 23- فرد ويستون، برجين برجام، التمويل الإداري - الجزء الأول، تعريب: د. عدنان دافستاني، عبد الفتاح السيد النعماني، الرياض: دار المريخ للنشر، 1993.
- 24- د. محمد سعيد عبد الفتاح، إدارة المشتريات والمخازن، الإسكندرية: المكتب العربي الحديث، 1985.
- 25- د. محمود محمد المنصوري، إدارة النظم والعمليات الإنتاجية، بنغازي: منشورات مركز بحوث العلوم الاقتصادية، الطبعة الثانية، 1998.
- 26- د. نظيمة عبد العظيم خالد، إدارة المخازن: المبادئ العملية والتطبيق العملي، القاهرة: دار الثقافة العربية، 1977.

## الملحق

### الاحتمالات والتوزيعات الاحتمالية

#### 1- المفاهيم الأساسية لنظرية الاحتمالات:

##### أ- التجربة العشوائية (Random Experiment):

هي كل عمل أو إجراء نعلم مقدماً بجميع نتائجه الممكنة ولكن لا نعلم مسبقاً أيًا من هذه النتائج سوف نحصل عليها عند القيام بهذا العمل أو الإجراء؛ فمثلاً عند إلقاء قطعة نقود في الهواء وتركها حتى تستقر على الأرض وأحد وجهيها إلى الأعلى فنعلم مسبقاً أن نتائج هذه العملية هي الحصول على الصورة أو الكتابة، ولكن لا نعلم على وجه التحديد أيًا من هذين الناتجين سوف نحصل عليه عند القيام بهذا العمل؛ لذلك فإن هذه العملية تعرف بالتجربة العشوائية.

##### ب - فراغ العينة (Sample Space):

هو فئة جميع النتائج الممكنة للتجربة العشوائية ويرمز له بالرمز (S) وقد يكون فراغ العينة محدوداً إذا كان عدد نتائج التجربة محدوداً، وقد يكون فراغ العينة غير محدود إذا كان عدد نتائج التجربة غير محدود. فمثلاً عند إلقاء زهرة نرد في الهواء وتركها حتى تستقر على الأرض وأحد وجهيها إلى أعلى فإن فراغ العينة لهذه التجربة هو  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  وهو فراغ عينة محدود. وعند اختيار طالب وقياس وزنه فيكون فراغ العينة غير محدود.

##### ج- الحدث (Event):

هو فئة جزئية من فراغ العينة (S) ويسمى حدثاً بسيطاً إذا كان يحتوي على نتيجة واحدة فقط ويسمى حدثاً مركباً إذا كان يحتوي على أكثر من نتيجة واحدة.

مثال (1) - فمثلاً عند إلقاء زهرة نرد فإن:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

فإذا كان A يمثل حدث الحصول على عدد أقل من 2 فإن  $A = \{1\}$  وبالتالي فإن A هو حدث بسيط. أما إذا كان A يمثل حدث الحصول على عدد زوجي فإن  $A = \{2, 4, 6\}$  وهو حدث مركب.



تلك يمكن تحديد عدد عناصره أو عدد الحالات التي تحقق حدثاً معيناً بإحدى الطرق التالية:

#### 1- القاعدة الأساسية للعدد:

إذا أجرينا تجربة عشوائية على عدة مراحل ولكن K مرحلة وكان عدد نتائج المرحلة الأولى  $n_1$  وعدد نتائج المرحلة الثانية  $n_2$  وعدد نتائج المرحلة الثالثة  $n_3$  وهكذا إلى عدد نتائج المرحلة الأخيرة  $n_k$  فإن فراغ العينة لهذه التجربة هو  $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_k$ .

مثال (2) - إذا كانت اللوحة المعدنية لرقم السيارة تحتوي على ثلاثة أرقام بحيث رقم المئات لا يكون صفراً فكم عدد اللوحات التي يمكن طبعتها لأرقام السيارات (عدد عناصر هذه التجربة).

نلاحظ: أنه يمكن اختيار الرقم الأول (رقم الآحاد) بعشر طرق ( $n_1 = 10$ )

ويمكن اختيار الرقم الثاني (رقم العشرات) بعشر طرق ( $n_2 = 10$ )

ويمكن اختيار الرقم الثالث (رقم المئات) بتسع طرق ( $n_3 = 9$ )

وبذلك فإن عدد اللوحات التي يمكن طبعتها  $10 \times 10 \times 9 = 900$  لوحة.

مثال (3) - بكم طريقة يمكن أخذ ثلاثة أحرف معاً من الأحرف الآتية: a, b, c, d.

يمكن اختيار الحرف الأول بأربع طرق  $n_1 = 4$

يمكن اختيار الحرف الثاني بثلاث طرق  $n_2 = 3$

يمكن اختيار الحرف الثالث بطريقتين  $n_3 = 2$

وبذلك يكون عدد طرق اختيار ثلاثة أحرف معاً  $4 \times 3 \times 2 = 24$  طريقة.

#### ب - قانون التباديل Permutation:

التبديل هو عدد طرق اختيار  $r$  عنصر من بين  $n$  عنصر مع أخذ الترتيب في الاعتبار (الترتيب مهم) ويرمز له بالرمز

حيث:  $P_n^r$

حيث  $P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$

علماً بأن  $(n!)$  يقرأ مضروب  $(n)$  وأن  $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n = n!$

$1! = 1$ ؛  $2! = 2$ ؛  $3! = 6$ ؛  $4! = 24$ ؛  $5! = 120$ ؛  $6! = 720$ ؛  $7! = 5040$ ؛  $8! = 40320$ ؛  $9! = 362880$ ؛  $10! = 3628800$ ؛

مثال (4) - كم عدد مكون من أربعة أرقام يمكن تركيبه من الأرقام التالية: 2، 3، 4، 6، 8، 9

#### د - الحدث المؤكد:

هو الحدث الذي يشمل جميع النتائج الممكنة للتجربة العشوائية (فراغ العينة). فمن المثال السابق إذا كان C يمثل حدث الحصول على عدد أكبر من أو يساوي الواحد الصحيح فإن  $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  وهو حدث مؤكد.

#### هـ - الحدث المستحيل:

هو الحدث الذي لا يحتوي على أية ناتج من نتائج التجربة العشوائية ويرمز له بالرمز  $\emptyset$ . فمثلاً من المثال السابق إذا كان D يمثل حدث الحصول على عدد أكبر من 6 فإن  $D = \emptyset$ .

#### و - الحدث المكمل (Complementary Event):

هو الحدث الذي يحتوي جميع نتائج التجربة العشوائية ولكنه ليس من ضمن الحدث الأصلي؛ فإذا كان A حدث من فراغ عينة محدودة فإن الحدث المكمل له يرمز له بالرمز  $A^c$  أو  $A'$ .

فإذا كان  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  وكانت  $A = \{2, 4, 6\}$  فإن  $A' = \{1, 3, 5\}$ .

#### ز - الأحداث المتنافية والأحداث غير المتنافية (Mutually Exclusive Events):

الأحداث المتنافية هي الأحداث التي لا يمكن وقوعها معاً، في حين الأحداث غير المتنافية هي الأحداث التي يمكن وقوعها معاً. فإذا كان A، B حدثين متنافيين فإن  $A \cap B = \emptyset$ . أما إذا كان (B, A) حدثين غير متنافيين فإن  $A \cap B \neq \emptyset$ .

فمثلاً إذا كان  $A = \{2, 4, 6\}$ ،  $B = \{1, 3, 5\}$  فإن  $A \cap B = \emptyset$  حدثان متنافيات  $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$  و  $B = \{1, 2, 3\}$  فإن  $A \cap B = \{2, 3\}$  حدثان غير متنافيين حيث  $(3, 2) \cap A = B$ .

#### ر - الأحداث المستقلة والأحداث غير المستقلة (Independent Events):

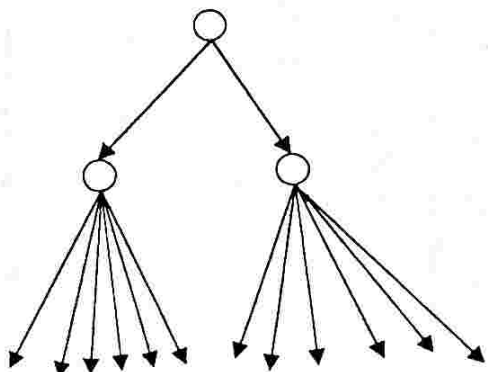
الأحداث المستقلة هي الأحداث التي لا يؤثر حدوث أحدها على حدوث الأحداث الأخرى. في حين الأحداث غير المستقلة هي الأحداث التي يؤثر حدوث أحدها على حدوث الأحداث الأخرى. فمثلاً في تجربة اختيار كرتين من بين 5 كرات بيضاء و6 كرات سوداء. فإذا كان الاختيار عن أساس واحدة بعد الأخرى بالإرجاع (بالإحلال) فإن حدث اختيار كرة بيضاء مستقل على حدث اختيار كرة سوداء. أما إذا كان الاختيار على أساس عدم الإرجاع (بدون إحلال)، فإن حدث اختيار كرة بيضاء يكون غير مستقل على حدث اختيار كرة سوداء.

#### 2- القواعد الأساسية لتحديد عدد عناصر فراغ (S) أو أي حدث:

حيث إن فراغ العينة وعدد الحالات التي تحقق حدثاً معيناً يستخدم في حساب الاحتمالات بهذا الحدث، وفي بعض الأحيان يكون عدد عناصر فراغ العينة عدداً كبيراً

مثال (7) - إذا أقيمت قطعة تقود زورقاً فوجد فراغ العينة باستخدام الشجرة البيانية.

شكل (5-1)



وبذلك يكون عدد عناصر فراغ العينة = 12

أي أن:

$$S = \{(T, 1), (T, 2), (T, 3), (T, 4), (T, 5), (T, 6), (H, 1), (H, 2), (H, 3), (H, 4), (H, 5), (H, 6)\}$$

و - العينات المرئية:

تدور الكثير من مشاكل التحليل وبصفة خاصة في علم الاحتمالات حول اختيار عنصر من بين  $n$  عنصر بالإحلال أو بدون إحلال.

1 - المماثلة مع الإحلال (الإرجاع):

في هذه الحالة يعاد العنصر المختار أو لا قبل اختيار العنصر الثاني ثم يعاد العنصر الثاني قبل اختيار العنصر الثالث وهكذا إلى العنصر الأخير، لذلك يكون عدد طرق اختيار العنصر الأول يساوي عدد طرق اختيار العنصر الثاني وهكذا إلى العنصر الأخير ويساوي  $(n)$ ، لذلك يمكن استخدام القاعدة الأساسية للعد لتحديد عدد طرق اختيار  $r$  عنصر من بين  $n$  عنصر مع الإحلال وهي  $n^r$ .

مثال (8) - صندوق به 6 بطاقات مرقمة من 1 إلى 6 سحبت عشوائياً بطاقتان واحدة بعد الأخرى مع الإحلال. كم عدد عناصر فراغ العينة؟ عدد عناصر فراغ العينة هو  $6^2 = 36$ .

حيث إن الترتيب هنا مهم فالعدد 6432 يختلف عن العدد 4623 لذلك نستخدم قانون التباديل ب  $n = 4, r = 4$ ، وبذلك يكون عدد الأعداد التي يمكن تكوينها هو:

$$P_4^6 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2!} = 360$$

ج - قانون التباديل مع وجود تكرار لبعض العناصر:

يراد أحياناً معرفة عدد طرق تبادل  $(n)$  عنصراً والتي يوجد من بينها عناصر مكررة أكثر من مرة؛ ففي هذه الحالة يستخدم قانون التباديل مع وجود تكرار وهو

$$S = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times n_3! \times \dots \times n_k!}$$

حيث  $(n_1)$  عدد مرات تكرار العنصر الأول و  $(n_2)$  عدد مرات تكرار العنصر الثاني وهكذا إلى  $n_k$  عدد مرات تكرار العنصر الأخير بحيث  $= n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k$

د - قانون التوافيق:

التوافيق هو عدد طرق اختيار  $r$  عنصر من بين  $n$  عنصر دون أخذ الترتيب في الاعتبار (الترتيب غير مهم). ويرمز له بالرمز  $C_r^n$  حيث:

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال (5) - كم لجنة ثلاثية يمكن تكوينها من بين 8 أشخاص؟

نلاحظ هنا الترتيب غير مهم لذلك نستخدم قانون التوافيق ب  $n = 8, r = 3$  وبذلك يكون عدد اللجان التي يمكن تكوينها

$$C_3^8 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3! \times 5!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$$

مثال (6) - في أحد الامتحانات مطلوب من الطالب أن يجيب على أربعة أسئلة من بين ستة أسئلة، فيكم طريقة يمكن أن يختار الطالب الأسئلة؟

حيث إن الترتيب هنا غير مهم لذلك نستخدم قانون التوافيق ب  $n = 6, r = 4$  وبذلك يكون عدد طرق اختيار الأسئلة هو:

$$C_4^6 = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$

هـ - طريقة الشجرة البيانية:

هي طريقة تستعمل كل النتائج الممكنة من التجارب إذا كانت كل تجربة يمكن وقوعها بعدد متين من الطرق حيث نرسم شجرة بعدد من الأفرع مسار لعدد نتائج التجربة الأولى، وكل فرع من هذه الأفرع يتفرع إلى عدد من الأفرع بعدد نتائج التجربة الثانية وهكذا إلى أن نصل إلى التجربة الأخيرة. وبذلك يكون فراغ العينة عبارة عن عدد الفروع الأخيرة لهذه الشجرة.

وبالتالي :

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = 0.5$$

مثال (12) - إذا اختير طالب عشوائياً من طلبة هذا الفصل الذي به 40 طالباً و 20 طالبة فما احتمال اختيار طالبة . عدد طرق الاختيار الكلية هو  $60 = 40 + 20$  .  $n$

نفرض  $A$  يمثل حدث اختيار طالبة فإن عدد الحالات التي تحقق هذا الحدث هو  $m = 20$  وبالتالي :

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{20}{60} = 0.33$$

مثال (13) - إذا كان الإنتاج اليوم لأحد المصانع 1000 من بينها 20 وحدة غير صالحة . فإذا سحبت وحدة واحدة من إنتاج هذا المصنع فأوجد احتمال سحب وحدة صالحة .

الحل :

عدد طرق اختيار وحدة من إنتاج هذا المصنع هي  $n = 1000$   
نفرض  $A$  تمثل سحب وحدة صالحة . عدد طرق اختيار وحدة صالحة هو  $m = 980$   
وبالتالي فإن :

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{980}{1000} = 0.98$$

مسلمات الاحتمالات :

• احتمال ظهور أي حدث أكبر من أو يساوي الصفر وأقل من أو يساوي الواحد أي أن :  
 $0 \leq P(A) \leq 1$

• احتمال الحدث المكمل يساوي واحداً ناقص احتمال الحدث الأصلي أي أن :  $P(A^c) = 1 - P(A)$

• احتمال الحدث المؤكد يساوي واحداً صحيحاً أي أن :  $P(S) = 1$

• احتمال الحدث المستحيل يساوي صفراً أي أن :  $P(\emptyset) = 0$

4- بعض قوانين حساب الاحتمالات لأكثر من حدث :

1- إذا كانت الأحداث متنافية :

إذا كان  $A, B$  حدثين متنافيين فإن احتمال وقوع أحدهما  $A$  أو  $B$  يرمز له بالرمز  $P(A \cup B)$  حيث  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

2- المعامية بدون إحلال (بدون إرجاع) :

في هذه الحالة لا يعاد العنصر المختار أولاً قبل اختيار العنصر الثاني ولا يعاد العنصر الثاني قبل اختيار العنصر الثالث وهكذا إلى العنصر الأخير . وذلك لا يظهر العنصر المختار أولاً مرة أخرى وكذلك العنصر المختار ثانياً وهكذا إلى العنصر الأخير . لذلك يمكن استخدام قانون التباديل في تحديد عدد عناصر فراغ العينة في مثل هذه الحالة .

مثال (9) - من المثال السابق كم عدد عناصر فراغ العينة إذا سحب من الصندوق بطاقتان واحدة بعد الأخرى بدون إحلال (بدون إرجاع) . عدد عناصر فراغ العينة :

$$P_2^6 = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4!} = 6 \times 5 = 30$$

3- المعامية معاً :

في هذه الحالة كل العناصر تؤخذ معاً لذلك يكون الترتيب غير مهم . وبذلك يمكن استخدام قانون التوافيق .

مثال (10) - من المثال السابق إذا أخذنا بطاقتين معاً ، فكم يكون عدد عناصر فراغ العينة ؟

$$C_2^6 = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{2 \times 1 \times 4!} = \frac{30}{2} = 15$$

3- حساب الاحتمال لحدث معين :

إذا أجرينا تجربة عشوائية  $n$  مرة وحصلنا على الحدث  $A$  في  $m$  نتيجة فإن احتمال الحصول على هذا الحدث عند إجراء التجربة مرة أخرى يرمز له بالرمز  $P(A)$  حيث  $P(A) = \frac{m}{n}$  وهذا ما يعرف بالتعريف التجريبي للاحتمال .

وإذا كان عدد نتائج فراغ العينة لتجربة عشوائية  $n$  نتيجة من بينها  $m$  نتيجة تحقق الحدث  $A$  ، فإن احتمال الحصول على هذا الحدث عند إجراء التجربة مرة أخرى يرمز له بالرمز  $P(A)$  حيث  $P(A) = \frac{m}{n}$  وهذا ما يعرف بالتعريف الكلاسيكي للاحتمال .

مثال (11) - عند رمي زهرة نرد ما احتمال ظهور عدد زوجي فراغ العينة  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$   $S$  به 6 نتائج أي أن  $n = 6$

نفرض  $A$  يمثل حدث ظهور عدد زوجي  $\{2, 4, 6\}$   $A = \{2, 4, 6\}$  به ثلاث نتائج أي أن  $m = 3$

نفرض A يمثل حدث سحب كرة سوداء وبالتالي فإن  $P(C) = 0.2$  وحيث إن السحب بالإرجاع (بالإرجاع) فنكون الأحداث مستقلة.

$$1- \text{إحتمال سحب كرة بيضاء وأخرى حمراء هو } P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0.3 \times 0.5 = 0.15$$

$$2- \text{إحتمال سحب كرة حمراء وأخرى سوداء هو } P(B \cap C) = P(B) \times P(C) = 0.5 \times 0.2 = 0.10$$

3- إحتمال أن تكون الكرتان حمراوين هو:

$$P(B \cap B) = P(B) \times P(B) = 0.5 \times 0.5 = 0.25$$

4- إذا سحبنا ثلاث كرات بالإرجاع فإن إحتمال أن تكون الكرة الأولى بيضاء والثانية حمراء والثالثة سوداء هو:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C) = 0.3 \times 0.5 \times 0.2 = 0.03$$

مثال (16) - إذا كان في مشاة ما محاسب ومراجع وإذا كان إحتمال أن المحاسب لا يخطئ عند قيامه بعمل معين هو 0.90 وإحتمال أن المراجع لا يخطئ عند مراجعة هذا العمل هو 0.95 فما إحتمال إتمام عمل معين دون وجود خطأ من المحاسب والمراجع وما إحتمال خطأ الاثنين معاً إذا علمت أن عمل المحاسب مستقل عن عمل المراجع.

الحل:

نفرض A يمثل حدث عدم خطأ المحاسب عند قيامه بعمل معين وبالتالي فإن  $P(A) = 0.9$

نفرض B يمثل حدث عدم خطأ المراجع عند مراجعته لعمل المحاسب وبالتالي فإن  $P(B) = 0.95$

$$\therefore \text{إحتمال عدم خطأ الاثنين معاً } P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0.9 \times 0.95 = 0.95$$

$$\text{إحتمال خطأ المحاسب هو } P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0.9 = 0.1$$

$$\text{إحتمال خطأ المراجع هو } P(B') = 1 - P(B) = 1 - 0.95 = 0.05$$

$$\therefore \text{إحتمال خطأ الاثنين هو } P(A' \cap B') = P(A') \times P(B') = 0.1 \times 0.05 = 0.005$$

ملاحظة - إذا كانت الأحداث غير متنافية:

إذا كان A, B حدثين غير متنافيين أي يمكن وقوعهما معاً، في هذه الحالة يكون إحتمال وقوع أحدهما A أو B يرمز له بالرمز  $P(A \cup B)$  حيث:

ويمكن تعميم هذا القانون لأي عدد من الأحداث المتنافية. فإذا كانت  $Z, C, B, A$  أحداثاً متنافية فإن:

$$P(A \cup B \cup C \cup \dots \cup Z) = P(A) + P(B) + P(C) + \dots + P(Z)$$

مثال (14) - نفرض أن مشاة صناعية اشترت 1000 وحدة من سلعة معينة، منها 20 وحدة بها عيوب كبيرة و90 وحدة بها عيوب بسيطة. فإذا سحبنا وحدة واحدة من هذه السلعة فما هو إحتمال وجود عيب كبير أو بسيط في الوحدة المسحوبة؟

نفرض A يمثل حدث وجود وحدة بها عيب كبير وبالتالي فإن  $P(A) = 20/1000 = 2/100$

نفرض B هو حدث وجود وحدة بها عيوب بسيطة وبالتالي فإن  $P(B) = 90/1000 = 9/100$

وحيث إن A, B حدثان متنافيان فإن:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 2/100 + 9/100 = 11/100 = 0.11$$

ب - إذا كانت الأحداث مستقلة:

إذا كان A, B حدثين مستقلين فإن إحتمال وقوعهما معاً يرمز له بالرمز  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

ويمكن تعميم هذا القانون لأي من الأحداث المستقلة. فإذا كانت  $Z, C, B, A$  أحداثاً مستقلة فإن:

$$P(A \cap B \cap C \cap \dots \cap Z) = P(A) \times P(B) \times P(C) \times \dots \times P(Z)$$

مثال 15 - صندوق يحتوي على 3 كرات بيضاء و5 كرات حمراء وكرتين سوداوين، فإذا سحبنا من هذا الصندوق عشوائياً كرتين واحدة بعد الأخرى بالإرجاع فأوجد:

1- إحتمال سحب كرة بيضاء وأخرى حمراء.

2- إحتمال سحب كرة حمراء وأخرى سوداء.

3- إحتمال أن تكون الكرتين حمراوين.

4- إذا سحبنا ثلاث كرات بالإرجاع فما إحتمال أن تكون الكرة الأولى بيضاء والثانية حمراء والثالثة سوداء؟

الحل:

نفرض A يمثل حدث سحب كرة بيضاء وبالتالي فإن  $P(A) = 0.3$

نفرض B يمثل حدث سحب كرة حمراء وبالتالي فإن  $P(B) = 0.5$

A نيرمز له بالرمز  $P(B/A)$  ويقرأ احتمال وقوع الحدث B، علماً بأن الحدث A قد وقع أو احتمال وقوع الحدث B بشرط وقوع الحدث A. وفي هذه الحالة نجد أن:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A)$$

ومنه نجد أن:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

وإذا كان هناك ثلاثة أحداث غير مستقلة A, B, C فإن:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B/A) \times P(C/AB)$$

مثال (18):

إذا كان 80% من زبائن أحد المصارف لهم حسابات جارية، 50% لهم حسابات توفير و30% لهم الحسابات معاً. فإذا تم اختيار شخص عشوائياً من بين زبائن هذا المصرف فما هو احتمال أن يكون له حساب جارٍ علماً بأن لديه حساب توفير؟ وما هو احتمال أن يكون لديه حساب توفير علماً بأن لديه حساباً جارياً؟

نفرض A يمثل حدث اختيار شخص لديه حساب جارٍ، وبالتالي فإن  $P(A) = 0.80$

نفرض B يمثل حدث اختيار شخص لديه حساب توفير، وبالتالي فإن  $P(B) = 0.50$

$$P(A \cap B) = 0.30$$

لذلك يكون:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.30}{0.50} = 0.60$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.30}{0.50} = 0.60$$

مثال (19) - صندوق به 3 كرات بيضاء و2 كرات حمراء وكرتان سوداوان. فإذا سحبت من الصندوق ثلاث كرات بدون إرجاع فأوجد:

- 1- احتمال أن تكون الكرة الأولى بيضاء والثانية حمراء والثالثة سوداء.
- 2- احتمال أن تكون الكرة الأولى سوداء والثانية بيضاء والثالثة حمراء.

الحل:

$$P(A) = 0.30 \therefore \text{يفضل حدث سحب كرة بيضاء أولاً}$$

$$P(B) = 0.50 \therefore \text{يفضل حدث سحب كرة حمراء أولاً}$$

$$P(C) = 0.20 \therefore \text{يفضل حدث سحب كرة سوداء أولاً}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

وإذا كانت A, B, C أحداثاً غير متنافية فإن:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

مثال (17) - من بين 3000 وحدة منتجة في أحد المصانع وجد أن 150 وحدة بها عيوب في الصنع و 270 وحدة بها عيوب في التشغيل النهائي و 60 وحدة معيبة في الصنع والتشغيل النهائي. فإذا سحبت وحدة واحدة من هذا الإنتاج فما احتمال أن تكون الوحدة في الصنع أو التشغيل النهائي؟

نفرض A يمثل حدث سحب وحدة. في الصنع  $P(A) = 150/3000 = 15/300$

نفرض B يمثل حدث سحب وحدة. في التشغيل النهائي  $P(B) = 270/3000 = 27/300$

وبالتالي فإن احتمال سحب وحدة. في الصنع وفي التشغيل هو  $P(A \cap B) = 60/3000 = 6/300$

وهذا يدل على أن الأحداث غير متنافية.

لذلك فاحتمال سحب وحدة معيبة في الصنع أو التشغيل النهائي هو:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 15/300 + 27/300 - 6/300 = 36/300 = 0.12$$

د- إذا كانت الأحداث غير مستقلة:

إذا كان A, B حدثين غير مستقلين (أي وقوع أحدهما يؤثر بوقوع الآخر) وعليه فإن وقوع الحدث الأول يؤثر في احتمال وقوع الحدث الثاني لذلك عند حساب احتمال الحدث الثاني يكون مبنياً على وقوع الحدث الأول وهذا ما يعرف بالاحتمال الشرطي؛ فإذا وقع الحدث B أولاً فإن احتمال الحصول على الحدث A يكون مبنياً على الحدث B ونرمز له بالرمز  $P(A/B)$  ويقرأ احتمال وقوع الحدث A علماً بأن الحدث B قد وقع، أو احتمال وقوع الحدث A بشرط وقوع الحدث B.

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A/B)$$

ومنه نجد أن:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

أما إذا وقع الحدث A أولاً، فإن احتمال وقوع الحدث B يكون مبنياً على الحدث

المينة هنا، حيث احتمال اختيار صندوق عشوائياً هو  $1/3$  واحتمال سحب مصباح معيب علمياً بأنه من الصندوق الأول  $4/10$  واحتمال سحب مصباح معيب علمياً بأنه من الصندوق الثاني  $1/6$  واحتمال سحب مصباح معيب علمياً بأنه من الصندوق الثالث  $3/8$ .

لذلك يكون احتمال سحب مصباح معيب من الصندوق الأول هو

$$1/3 \times 4/10 = 4/30$$

واحتمال سحب مصباح معيب من الصندوق الثاني هو

$$1/3 \times 1/6 = 1/18$$

واحتمال سحب مصباح معيب من الصندوق الثالث هو

$$1/3 \times 3/8 = 3/24$$

إحتمال سحب مصباح معيب = إحتمال سحب مصباح معيب من الصندوق الأول + إحتمال سحب مصباح معيب من الصندوق الثاني + إحتمال سحب مصباح معيب من الصندوق الثالث.

$$3/24 + 1/18 + 4/30 = 113 \div 360$$

و- نظرية بيز Bayes Formula :

نفرض أن  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  أحداث متنافية من فراغ عينة محدودة (S) حيث :

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = S$$

وأن B أي حدث آخر في فراغ العينة S حيث  $S \cap B = B$

وبالتعويض بقيمة S نحصل على  $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = B \cap B = B$

حيث إن  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  أحداث متنافية فإن :

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B) \dots (A_n \cap B)$$

وبالتالي فإن :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B) + \dots P(A_n \cap B)$$

وباستخدام قانون القرب نجد أن :

$$P(B) = P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + \dots \cup P(A_n)P(B/A_n)$$

وحيث إن :

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

وحيث إن السحب بدون إرجاع لذلك تكون الأحداث غير مستقلة.

فإذا سحبنا الكرة الأولى وكانت بيضاء فإن احتمال أن تكون الكرة الثانية حمراء هو :

$$P(B/A) = 5/9 = 0.56$$

ولذا سحبنا الكرة الأولى وكانت بيضاء وسحبنا الكرة الثانية وكانت حمراء فإن احتمال أن تكون الثالثة سوداء هو  $P(C/AB) = 2/8 = 0.25$ .

وبالتالي فإن احتمال أن تكون الكرة الأولى بيضاء والثانية حمراء والثالثة سوداء هو :

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B/A) \times P(C/AB) = 0.30 \times 0.56 \times 0.25 = 0.042$$

ولذا سحبنا الكرة الأولى وكانت سوداء فإن احتمال أن تكون الثانية بيضاء هو  $P(A/C) = 3/9 = 0.33$  واحتمال أن تكون الثالثة حمراء هو  $P(B/CA) = 3/8 = 0.375$ .

وبالتالي فإن احتمال أن تكون الكرة الأولى سوداء والثانية بيضاء والثالثة حمراء هو :

$$P(C \cap A \cap B) = P(C) \times P(A/C) \times P(B/CA) = 0.20 \times 0.33 \times 0.375 = 0.02475$$

هـ- حساب الاحتمالات باستخدام الشجرة البيانية :

يمكن حساب احتمال أي حدث في متتابعة من التجارب بحيث تكون نواتجها متباعدة باستخدام الشجرة البيانية، حيث نرسم شجرة بعدد من الأفرع مساو لعدد نتائج التجربة الأولى، وكل فرع من هذه الفروع يتفرع إلى عدد من الأفرع مساو لعدد نتائج التجربة الثانية وهكذا إلى أن نصل إلى التجربة الأخيرة. ولحساب احتمال أي حدث في هذه المتتابعة من التجارب يتبع مسار هذا الحدث واستخدام قوانين الاحتمالات السابقة.

مثال (20) - إذا كان لدينا ثلاثة صناديق يحتوي الصندوق الأول على 10 مصابيح من بينها 4 معيبة. ويحتوي الصندوق الثاني على 6 مصابيح من بينها واحد معيب. ويحتوي الصندوق الثالث على 8 مصابيح من بينها 3 معيبة. فإذا اخترنا صندوق عشوائياً وسحبنا منه مصباح عشوائياً فما احتمال سحب مصباح معيب؟ شكل (2-5)

الحل :

في هذه التجربة متابعان من التجارب هما :

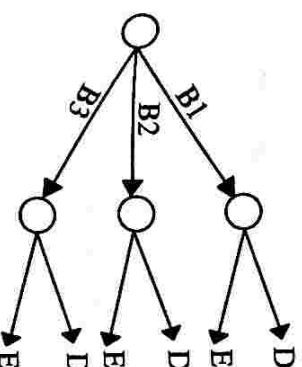
قد يكون معيباً D =

أو غير معيب E =

1- اختيار صندوق من بين الصناديق الثلاثة.

2- اختيار مصباح من الصندوق المختار.

يمكن حساب ذلك بالشجرة البيانية





بالحروف الصغيرة المناظرة. فمثلاً إذا كان  $X$  متغيراً عشوائياً فنقول  $X$  يأخذ القيم  $x_1$  و  $x_2$  و  $x_3$  وهكذا إلى  $x_m$  ويرمز لذلك بالرمز  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$ .

ب- أنواع المتغيرات العشوائية:

#### 1- المتغير العشوائي المنفصل (المقطع):

هو المتغير العشوائي الذي يأخذ عدداً محدوداً من القيم كما في المثال السابق  $X = 0, 1, 2, 3$ . وهو عادة ما ينتج من عدد الأشياء مثل عدد الصور التي نحصل عليها عند إلقاء قطعة نقود عدة مرات أو أعداد الطلبة بالكليات والمعاهد العليا أو عدد الحوادث التي تقع في إحدى الطرق وغيرها.

#### 2- المتغير العشوائي المتصل (المستمر):

هو المتغير العشوائي الذي يأخذ عدداً غير محدود من القيم (أي يأخذ قيماً متصلة أو مستمرة في فئة الأعداد الحقيقية أو فئة جزئية منها). وهو عادة ما يكون نتيجة لقياس الأشياء مثل الأطوال أو الأوزان أو الكميات أو الدخول وغيرها. فمثلاً إذا كان  $X$  يمثل إنتاج الهكتار الواحد من أحد المحاصيل فإن  $X \geq 0$  هو متغير عشوائي متصل (مستمر) حيث يأخذ قيماً غير محدودة في الفترة أكبر من صفر.

#### ج- التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل:

إذا كان  $X$  متغيراً عشوائياً منفصلاً يأخذ القيم  $x_1$  و  $x_2$  و  $x_3$  و  $\dots$  و  $x_m$  ووجد احتمال لكل قيمة من قيم هذا المتغير العشوائي ووضعت قيم هذا المتغير والاحتمالات المناظرة لها في صورة جدول، فإن هذا الجدول يعرف بجدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي. وعادة ما يرمز إلى احتمال أن المتغير العشوائي ( $X$ ) يأخذ القيمة ( $x$ ) بالرمز  $P(x)$  حيث  $P(X = x)$ .

والتوزيع الاحتمالي لأي متغير عشوائي منفصل يجب أن يحقق الشرطين التاليين:

$$1 - 0 \leq P(x) \leq 1 \quad 2 - \sum P(x) = 1$$

فمن المثال السابق فإن التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي  $X$  الذي يمثل عدد مرات الحصول على الصورة عند رمي قطعة نقود متزنة ثلاث مرات هو:

X	0	1	2	3
P(x)	1/8	3/8	3/8	1/8

ويمكن إيجاد احتمالات أن المتغير العشوائي يأخذ قيمة تزيد أو تقل عن قيمة معينة بالجمع المباشر لاحتمالات قيم المتغير العشوائي في المجال المحدد لذلك. فمثلاً من المثال السابق لرمي قطعة نقود متزنة ثلاث مرات نجد أن:

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = 3/8 + 1/8 = 4/8 = 1/2 = 0.5$$

لذلك فإن:

$$P(Ai/B) = \frac{P(Ai)P(B/Ai)}{P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + \dots + P(A_n)P(B/A_n)}$$

وهذا ما يعرف بنظرية بير.

$$P(Ai/B) = \frac{P(Ai)P(B/Ai)}{\sum_{i=1}^n P(Ai)P(B/Ai)}$$

مثال (21) - ثلاث آلات  $M_1, M_2, M_3$  تنتج على الترتيب 20%، 30%، 50% من إنتاج المصنع وكان نسبة المعيب من هذه الآلات على الترتيب 4%، 3%، 5%. فإذا اختيرت وحدة من إنتاج هذا المصنع، فما هو احتمال أن تكون الوحدة معيبة؟ وما هو احتمال أن تكون من الآلة  $M_2$  علماً بأنها معيبة.

نفرض أن  $A$  حدث، إن الوحدة معيبة

$$P(A) = P(A \cap M_1) + P(A \cap M_2) + P(A \cap M_3)$$

$$= P(M_1)P(A/M_1) + P(M_2)P(A/M_2) + P(M_3)P(A/M_3)$$

$$= (0.50)(0.03) + (0.30)(0.04) + (0.20)(0.05)$$

$$= 0.015 + 0.012 + 0.010 = 0.037$$

$$P(M_2/A) = \frac{P(M_2 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(M_2)P(A/M_2)}{P(A)}$$

$$P(M_2/A) = \frac{0.30 \times 0.04}{0.037} = \frac{0.012}{0.037} = 0.324$$

#### 5- المتغيرات العشوائية وتوزيعات الاحتمالية:

##### أ- تعريف المتغير العشوائي:

إذا قمنا بقطع نقود متزنة ثلاث مرات فإن فراغ العينة لهذه التجربة هو  $S$  حيث:

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

فإذا كان اهتمامنا بعدد مرات الحصول على الصورة وربطنا عدم الحصول على الصورة بالعدد (0) وظهور الصورة مرة واحدة بالعدد (1) وظهور الصورة مرتين بالعدد (2) وظهور الصورة ثلاث مرات بالعدد (3) فنقول: إن نتيجة هذه التجربة هي: 0 أو 1 أو 2 أو 3. وإذا رمزنا إلى عدد مرات الحصول على الصورة بالرمز  $X$  فإن:

$$X = 0, 1, 2, 3$$

وهذا ما يعرف بالمتغير العشوائي؛ أي أن المتغير العشوائي هو دالة من فراغ العينة ( $S$ ) إلى فئة الأعداد الحقيقية أو فئة جزئية منها، أو أن المتغير العشوائي هو اقتران حقيقي بين مجموعة الأعداد الحقيقية ونتائج التجربة العشوائية. وعادة ما يرمز للمتغير العشوائي بأحد الحروف الكبيرة  $X$  أو  $Y$  أو  $Z$ ... وهكذا. والى القيم التي يأخذها المتغير

$$2 - \int_{-\infty}^{\infty} P(x) dx = 1$$

$$1 - 0 \leq P(x) \leq 1$$

وتعرف بدالة كثافة التوزيع الاحتمالي ومنه يمكن إيجاد احتمال أن المتغير العشوائي يأخذ قيمة تزيد أو تقل عن قيمة معينة بتكامل دالة التوزيع الاحتمالي في المجال المحدد لذلك. فمثلاً إذا كانت  $P(x) = \frac{3}{8}x^2$  تمثل دالة كثافة التوزيع الاحتمالي للمتغير  $X$  في المجال  $0 \leq x \leq 2$  حيث:

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 \frac{3}{8}x^2 dx = \frac{3}{8} \left( \frac{x^3}{3} \right)_0^2 = \frac{3}{8} \left( \frac{8}{3} - 0 \right) = 1$$

وبالتالي فإن

$$P(x = 1) = \int_1^1 \frac{3}{8}x^2 = 0$$

$$P(X \leq 1) = P(X < 1) = \int_0^1 \frac{3}{8}x^2 = \frac{3}{8} \left( \frac{x^3}{3} \right)_0^1 = \frac{3}{8} \left( \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{8} = 0.125$$

$$P(X \geq 0.5) = P(X \geq 0.5) = \int_{0.5}^2 \frac{3}{8}x^2 = \frac{3}{8} \left( \frac{x^3}{3} \right)_{0.5}^2 = \frac{3}{8} \left( \frac{8}{3} - \frac{0.125}{3} \right) = \frac{7.875}{8} = 0.984$$

$$P(0.5 \leq X \leq 1) = P(X \leq 1) - P(X \leq 0.5) = 0.125 - (1 - P(X \geq 0.5)) = 0.125 - 0.016 = 0.109$$

ويمكن تمثيل التوزيع الاحتمالي المتصل بمنحنى وذلك برسم محورين متعامدين وتمثيل قيم المتغير العشوائي على المحور الأفقي والاحتمالات على المحور الرأسي ثم وضع نقطة فوق كل قيمة من قيم المتغير العشوائي بارتفاع الاحتمال المناظر لها وتوصيل هذه النقاط بخط ممدد باليد نحصل على المنحنى الاحتمالي لهذا المتغير. فنجد المساحة الكلية تحت المنحنى تمثل مجموع الاحتمالات وبالتالي تساوي الواحد الصحيح.

م- دالة التوزيع الاحتمالي التراكمي (التجميعي):

إذا كان  $X$  متغيراً عشوائياً بدالة كثافة احتمالية  $f(x)$  فإن دالة التوزيع الاحتمالي التراكمي لهذا المتغير العشوائي هي احتمال أن المتغير العشوائي يأخذ قيمة أقل من أو تساوي قيمة معينة ويرمز لها بالرمز  $P(X \leq x) = \sum_{i=1}^x P(x_i)$  إذا كان المتغير العشوائي منفصلاً (متقطعاً). أي يجمع احتمال لكل قيمة من قيم المتغير العشوائي مع جميع احتمالات قيم المتغير السابقة لها.

أما إذا كان المتغير العشوائي متصلاً فإن  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$  أي  $F(x)$  يمكن تكامل دالة كثافة التوزيع الاحتمالي في المجال أقل من قيمة المتغير العشوائي.

فمثلاً من المعال السابق لرمي قطعة نقدية متزنة ثلاث مرات نجد أن التوزيع الاحتمالي التراكمي (التجميعي) هو:

X	0	1	2	3
F(X)	1/8	4/8	7/8	8/8

ويمكن تمثيله بيانياً بالشكل (4-0):

$$P(X > 2) = P(X = 3) = 1/8 = 0.125$$

$$P(X < 3) = 1 - P(X \geq 3) = 1 - P(X = 3) = 1 - 1/8 = 7/8 = 0.875$$

وقد يكون التوزيع الاحتمالي في صورة دالة (علاقة رياضية) تحدد الشرطين السابقين عند التعويض فيها بجميع قيم المتغير العشوائي. وتعرف بدالة كثافة التوزيع الاحتمالي.

فمثلاً الدالة  $P(x) = C_n^4 \left( \frac{1}{2} \right)^4$  هي دالة كثافة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي  $X$  حيث:

$$X = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$P(x_1) = P(X = 0) = C_0^4 \left( \frac{1}{2} \right)^4 = \frac{1}{16} \quad P(x_2) = P(X = 1) = C_1^4 \left( \frac{1}{2} \right)^4 = \frac{4}{16}$$

$$P(x_3) = P(X = 2) = C_2^4 \left( \frac{1}{2} \right)^4 = \frac{6}{16} \quad P(x_4) = P(X = 3) = C_3^4 \left( \frac{1}{2} \right)^4 = \frac{4}{16}$$

$$P(x_5) = P(X = 4) = C_4^4 \left( \frac{1}{2} \right)^4 = \frac{1}{16}$$

ونتحقق شرطي التوزيع الاحتمالي وهما  $0 \leq P(x) \leq 1$  و  $\sum P(x) = 1$  حيث

وكذلك الدالة  $P(x) = \frac{2}{8}$  هي دالة كثافة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي  $X$  حيث  $X = 1, 2, 3$

$$P(x_1) = P(X = 1) = \frac{1}{6} \quad P(x_2) = P(X = 2) = \frac{2}{6}$$

$$P(x_3) = P(X = 3) = \frac{3}{6}$$

ونتحقق شرطي التوزيع الاحتمالي وهما  $0 \leq P(x) \leq 1$  و  $\sum P(x) = 1$

ويمكن تمثيل التوزيع الاحتمالي المنفصل بيانياً برسم محورين متعامدين وتمثيل قيم المتغير العشوائي على المحور الأفقي وتمثيل الاحتمالات على المحور الرأسي ثم رفع فوق كل قيمة من قيم المتغير عمود الاحتمال المناظر لها كما في الشكل (3-0):

الشكل (3-0)



د- التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتصل (المستمر):

إذا كان  $X$  متغيراً عشوائياً متصلاً (مستمراً) في الفترة  $(-\infty, \infty)$  فإن التوزيع الاحتمالي المناظر له يكون على هيئة دالة (علاقة رياضية)  $P(x)$  تحقق الشرطين التاليين:

الحل :

$$E(X) = \mu_x = 1 \times \frac{1}{36} + 2 \times \frac{2}{36} + 3 \times \frac{3}{36} + 4 \times \frac{4}{36} + 5 \times \frac{5}{36} + 6 \times \frac{6}{36} \\ = \frac{1}{36} + \frac{2}{18} + \frac{15}{36} + \frac{28}{36} + \frac{45}{36} + \frac{66}{36} = \frac{161}{36} = 4.47$$

مثال (23) - إذا كانت تكاليف إنتاج قطعة صالحة للبيع في أحد الصانع هي 12 د. ل فإن تكاليف إنتاج قطعة غير صالحة للبيع هي 6 د. ل ، وإذا علمت أن احتمال إنتاج قطعة غير صالحة هو 1/6 فما هي القيمة المتوقعة لتكاليف إنتاج القطعة الواحدة بصورة عامة ؟

الحل :

نفرض أن X يمثل تكاليف إنتاج القطعة الواحدة، وبالتالي فإن التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير هو :

x	6	12
P(x)	1/6	5/6

$$E(X) = \mu_x = \sum_{i=1}^2 X_i F(X_i) = 6 \times \frac{1}{6} + 12 \times \frac{5}{6} = \frac{6}{6} + \frac{60}{6} = \frac{66}{6} = 11$$

أي أن التكاليف المتوقعة لإنتاج القطعة الواحدة هي 11 د. ل وإذا كان البيع بسعر التكلفة. الوحدة الواحدة هو 11 د. ل إذا كان البيع بسعر التكلفة.

مثال (24) - إذا كان X متغيراً عشوائياً متصلًا بدالة كثافة الاحتمال.

أوجد القيمة المتوقعة لهذا المتغير.

$$E(X) = \mu_x = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_2^5 \frac{x^2}{36} dx = \frac{1}{36} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_2^5 = \frac{1}{36} \left[ \frac{125}{3} - \frac{8}{3} \right] = \frac{1}{36} \left[ \frac{117}{3} \right] = \frac{117}{108} = \frac{13}{12} = 3.9$$

ز - التباين والانحراف المعياري :

إذا كان X متغيراً عشوائياً بدالة كثافة احتمالية f(x). وكانت القيمة المتوقعة لهذا المتغير هي  $\mu_x$ . فإن تباين هذا المتغير العشوائي يرمز له بالرمز  $\sigma^2 x$  أو  $\text{Var}(X)$  أو  $\sigma^2 x = \text{Var}(X) = E(X - \mu_x)^2 = E(X^2) - \mu_x^2 = E(X^2) - (E(X))^2$

حيث  $E(X^2) = \sum X^2 F(X)$

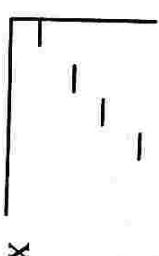
وبالتالي فإن الانحراف المعياري لهذا المتغير العشوائي يرمز له بالرمز  $\sigma_x$  حيث إن :

$$\sigma_x = \sqrt{\text{Var}(x)} = \sqrt{E(x)^2 - (E(x))^2}$$

ومن خواص التباين :

$$\text{Var}(a) = 0; \text{Var}(aX) = a^2 \text{Var}(X) \text{ فإن مقداراً ثابتاً فإن } \text{Var}(a) = 0$$

الشكل (4 - 0)



وكذلك يمكن تمثيل دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي المتصل بيانياً بمنحنى احتمالي.

ومن خواص دالة التوزيع التراكمي ما يلي :

1 - دالة التوزيع الاحتمالي التراكمي دالة تزايدية باستمرار أي أنه إذا كان  $x_2 < x_1$  فإن

$$F(x_1) \leq F(x_2)$$

2 -  $F(x_1) < F(x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

و - القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي (Expected Value) :

إذا كان X متغيراً عشوائياً بدالة كثافة احتمالية فإن القيمة المتوقعة لهذا المتغير العشوائي هي المتوسط الحسابي لهذا المتغير ويرمز له بالرمز  $E(X)$  أو  $\mu_x$  حيث :

$$E(X) = \mu_x = \sum x f(x)$$

$$E(X) = \mu_x = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \text{ فإن } \text{متصلاً فإن}$$

ومن خواص القيم المتوقعة ما يلي :

1 - إذا كان ه مقداراً ثابتاً فإن :

$$E(a) = a, \quad E(aX) = a E(X)$$

2 - إذا كان X, Y متغيرين عشوائيين لكل منهما توزيع احتمالي  $f(X), f(Y)$  على الترتيب فإن :

$$E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$$

3 - إذا كان X, Y متغيرين عشوائيين مستقلين فإن :  $E(XY) = E(X) E(Y)$

مثال (22) - إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير (X) هو :

X	1	2	3	4	5	6
P(x)	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

فأوجد القيمة المتوقعة لهذا المتغير العشوائي .

$$\delta x^2 = E(X^2) - (E(X))^2 = 1.57 - 1.02 = 0.55$$

$$\delta x = 0.74$$

مثال (27) - أقيمت قطعة نفود غير متزنة ثلاث مرات بحيث كان احتمال الحصول على الصورة يساوي ضعف احتمال الحصول على الكتابة. فأوجد:

- 1- التوزيع الاحتمالي لعدد مرات الحصول على الصورة.
- 2- القيمة المتوقعة والتباين لعدد مرات الحصول على الصورة.

الحل:

نفرض  $X$  يمثل عدد مرات الحصول على الصورة، فنجد أن  $X = 0, 1, 2, 3$  ونفرض  $H$  يمثل الحصول على الصورة و  $T$  يمثل الحصول على الكتابة وحيث إن  $P(H) + P(T) = 1$

$$P(H) + P(T) = 2P(T) + P(T) = 3P(T) = 1$$

$$P(H) = 1 - 1/3 = 2/3 \text{ وبالتالي } P(T) = 1/3$$

$$P(X = 0) = P(TTT) = P(T) P(T) P(T) = (1/3)^3 = 1/27 = 0.04$$

$$P(X = 1) = P(HTT) + P(THT) + P(TTH) = 3P(H) P(T) P(T) = 3(2/3)^2 (1/3) = 6/27 = 0.22$$

$$P(X = 2) = P(HHT) + P(HTH) + P(THH) = 3P(H) P(H) P(T) = 3(2/3)^2 (1/3) = 12/27 = 0.44$$

$$P(X = 3) = P(HHH) = P(H) P(H) P(H) = (2/3)^3 = 8/27 = 0.30$$

وبالتالي فإن التوزيع الاحتمالي للمتغير  $X$  الذي يمثل عدد مرات الحصول على الصورة يأخذ الشكل التالي:

X	0	1	2	3
P(x)	0.04	0.22	0.44	0.30

$$F(X) = \sum x f(x) = 0 \times 0.04 + 1 \times 0.22 + 2 \times 0.44 + 3 \times 0.30 = 2$$

$$E(X^2) = \sum x^2 f(x) = 1^2 \cdot 0.22 + 4^2 \cdot 0.44 + 9^2 \cdot 0.30 = 4.68$$

$$\text{Var.}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 4.68 - 4 = 0.68$$

6- بعض أهم التوزيعات الاحتمالية المنفصلة:

1- توزيع ذي الحدين (Binomial Distribution):

يعتبر توزيع ذي الحدين من أهم التوزيعات الاحتمالية المنفصلة، وهو يمثل

2- إذا كان  $X, Y$  متغيرين عشوائيين مستقلين فإن:

مثال (25):

أوجد القيمة المتوقعة والانحراف المعياري للمتغير العشوائي الذي له التوزيع

$X_i$	1	3	4	5
$P(X_i)$	0.4	0.1	0.2	0.3

$$\mu x = E(X) = x f(x) = 1 \cdot 0.4 + 3 \cdot 0.1 + 4 \cdot 0.2 + 5 \cdot 0.3$$

$$= 0.4 + 0.3 + 0.8 + 1.5 = 3$$

$$E(X^2) = 1^2 \cdot 0.4 + 9^2 \cdot 0.1 + 16^2 \cdot 0.2 + 25^2 \cdot 0.3$$

$$= 0.4 + 0.9 + 3.2 + 7.5$$

$$\delta x^2 = \text{Var}(X) = E(X^2) - \mu x^2 = 12 - 9 = 3, \quad \delta x = \sqrt{3} = 1.7$$

مثال (26) - صندوق به 12 وحدة من سلعة معينة، من بينها 4 وحدات معينة.

اخترت منه عينة عشوائية من ثلاث وحدات واحدة بعد الأخرى بدون إحلال فأوجد:

1- التوزيع الاحتمالي لعدد الوحدات المعينة.

2- القيمة المتوقعة والانحراف المعياري لعدد الوحدات المعينة.

الحل:

نفرض أن  $X$  يمثل عدد الوحدات المعينة 0, 1, 2, 3

$$P(X = 0) = \frac{C_0^4 C_{12}^8}{C_{12}^{12}} = \frac{4 \times 56}{220} = 0.25$$

$$P(X = 1) = \frac{C_1^4 C_{11}^8}{C_{12}^{12}} = \frac{4 \times 28}{220} = 0.51$$

$$P(X = 2) = \frac{C_2^4 C_{10}^8}{C_{12}^{12}} = \frac{6 \times 8}{220} = 0.22$$

$$P(X = 3) = \frac{C_3^4 C_9^8}{C_{12}^{12}} = \frac{4 \times 1}{220} = 0.02$$

التوزيع الاحتمالي لعدد الوحدات المعينة هو:

$X_i$	0	1	2	3
$P(X_i)$	0.25	0.51	0.22	0.02

$$E(X) = \sum x f(x) = 0 \cdot 0.25 + 1 \cdot 0.51 + 2 \cdot 0.22 + 3 \cdot 0.02 = 1.01$$

$$E(X^2) = \sum x^2 f(x) = 0^2 \cdot 0.25 + 1^2 \cdot 0.51 + 4^2 \cdot 0.22 + 9^2 \cdot 0.02 = 1.57$$

$$\begin{aligned}
P(X = 2) &= C_2^5 (0.5)^2 (0.5)^3 = 10(0.5)^5 = 0.03125 \\
P(X = 3) &= C_3^5 (0.5)^3 (0.5)^2 = 10(0.5)^5 = 0.03125 \\
P(X = 4) &= C_4^5 (0.5)^4 (0.5)^1 = 5(0.5)^5 = 0.15625 \\
P(X = 5) &= C_5^5 (0.5)^5 (0.5)^0 = (0.5)^5 = 0.03125
\end{aligned}$$

وبالتالي فإن جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير  $X$  الذي يمثل عدد مرات الحصول على الصورة يكون كما يلي:

$X$	0	1	2	3	4	5
$P(x)$	0.03125	0.15625	0.3125	0.3125	0.15625	0.03125

$$E(X) = np = 5(0.5) = 2.5 \quad \text{var}(X) = \delta^2 x = npq = 5(0.5)(0.5) = 1.25$$

مثال (29) - مصنع ينتج سلعة معينة فإذا علمت أن نسبة الإنتاج غير الصالح من هذه السلعة هو 10% سحبت عينة عشوائية من إنتاج هذا المصنع حجمها 10 وحدات فأوجد:

- 1- احتمال الحصول على 10 وحدات غير صالحة.
- 2- احتمال الحصول على أقل من 9 وحدات غير صالحة.
- 3- القيمة المتوقعة والانحراف المعياري لعدد الوحدات غير الصالحة.

الحل:

نفرض  $X$  يمثل عدد الوحدات غير الصالحة في العينة المسحوبة.

$X$  يتبع توزيع ذي الحدين ب  $P = 0.10$  و  $n = 10$ ،  $q = 0.90$ .

وبالتالي فإن دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير  $X$  هي:

$$P(x) = C_n^x p^x q^{n-x} \quad x = 0, 1, 2, 3, \dots, 10$$

$$P(x \geq 9) = P(X = 9) + P(X = 10)$$

$$= C_9^{10} (.10)^9 (.9)^{10-9} + C_{10}^{10} (.10)^{10} (.90)^0$$

$$= 10(0.000000009) + 0.000000001 = 0.0000000091$$

$$P(x < 9) = 1 - P(X \geq 9) = 1 - 0.0000000091 = 0.9999999909$$

$$E(X) = np = 10(0.10) = 1$$

$$\text{var}(X) = \delta^2 x = npq = 10(0.10)(0.90) = 0.90$$

مثال (30) - صندوق به 4 كرات بيضاء و 6 كرات حمراء سحبت من هذا الصندوق 4

بالتجارب العشوائية التي يمكن تقسيم نتائجها إلى حدثين متنافسين، واحتمال الحصول على كل من الحدثين ثابت خلال إجراء التجربة.

فإذا أجرينا تجربة عشوائية  $n$  مرة وأمكن تقسيم نتائجها إلى حدثين متنافسين مثل نجاح ورسوب واحتمال الحصول على نجاح ثابتاً خلال إجراء التجربة وليكن  $P$  واحتمال الرسوب هو  $q$  حيث  $q = 1 - P$  فإذا كان  $X$  متغيراً عشوائياً يمثل عدد مرات الحصول على نجاح، فإن احتمال الحصول على  $x$  نجاح هو:

$$P(x) = C_n^x p^x q^{n-x} \quad x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n$$

وعما ما يعرف بتوزيع ذي الحدين. ونلاحظ أن من معالم هذا التوزيع هو  $P$  احتمال الحصول على الحدث الذي نبحث فيه و  $n$  عدد مرات إجراء التجربة، وبالتالي يرمز لهذا التوزيع بالرمز

$$X \sim B(n, P)$$

ولقد وضعت جداول خاصة لهذا التوزيع فيها تصف احتمال أن المتغير  $X$  يأخذ قيمة معينة كما في جدول (1). والبعض الآخر يعطي الاحتمال التراكمي كما هو في جدول (2).

وهناك العديد من الظواهر تتبع في تغيراتها إلى هذا التوزيع مثل نجاح ورسوب، والمعييب وغير المعيب، الحصول على حدث معين أو عدم الحصول عليه، ووجود أخطاء أو عدم وجودها، وغيرها من الأمثلة. وإذا كان  $X$  متغيراً عشوائياً يتبع توزيع ذي الحدين فإن  $E(X) = \mu_x = np$  و  $\text{var}(X) = \delta^2 x = npq$

الحل:

نفرض  $X$  يمثل عدد مرات الحصول على الصورة 5، 4، 3، 2، 1، 0.  $X = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  حيث إن القطعة متزنة وبالتالي فإن احتمال الحصول على الصورة في كل مرة يساوي احتمال الحصول على الكتابة يساوي 0.5 أي أن  $n = 5$ ،  $q = 0.5$ ،  $p = 0.5$ ، وبالتالي فإن  $X$  يتبع توزيع ذي الحدين

$$P(x) = C_n^x p^x q^{n-x} = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

$$P(X = 0) = C_0^5 (0.5)^0 (0.5)^5 - 0 = (0.5)^5 = 0.03125$$

$$P(X = 1) = C_1^5 (0.5)^1 (0.5)^{5-1} = 5(0.5)^5 = 0.15625$$





إذا كان  $X$  متغيراً عشوائياً متصلاً في الفترة  $[a, b]$  لكل قيم  $a < b < \infty$ .

فإن الدالة الاحتمالية لهذا المتغير  $f(x) = \frac{1}{b-a}$  هي لكل قيم  $a \leq x \leq b$  وإذا كان  $X$  متغيراً عشوائياً يتبع هذا التوزيع فإن:

$$\mu_x = E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$\sigma_x^2 = Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}}$$

مثال (35) - سحبت عينة عشوائية من جدول الأعداد العشوائية لكل القيم بين 0, 99 فأوجد:

1 - احتمال أن يكون الرقم أكبر من 50.

2 - متوسط هذه الأرقام والانحراف المعياري لها.

نفرض  $X$  يمثل الرقم العشوائي المسحوب.

$X$  يتبع التوزيع المنتظم  $a = 0, b = 99$

$$f(x) = \frac{1}{99-0} = \frac{1}{99} \dots \dots \dots a \leq X \leq b$$

$$P(X > 50) = \int_{50}^{99} \frac{1}{99} dx = \frac{1}{99} [x]_{50}^{99} = \frac{1}{99} (99 - 50) = \frac{49}{99} = 0.50$$

$$\mu_x = E(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{0+99}{2} = \frac{99}{2} = 49.5$$

$$\sigma_x^2 = Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(99-0)^2}{12} = \frac{9801}{12} = 816.75 - 2$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}} = \sqrt{816.75} = 28.579$$

ب- التوزيع الأسّي:

إذا كان  $X$  متغيراً عشوائياً بداية كثافة التوزيع الاحتمالي

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \dots \dots \dots x \geq 0, \lambda > 0$$

فإذا  $X$  يعرف دالة التوزيع الأسّي وبالتالي:

$$\mu = E(X) = \frac{1}{\lambda} \dots \dots \dots \sigma^2 = Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

مثال (36):

$P(X > 1)$ , فأوجد  $\mu = 2$  بمتوسط الأسّي يتبع التوزيع

إذا كان  $X$  متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع

$$\mu = E(X) = \frac{1}{\lambda} = 2 \dots \dots \dots \lambda = \frac{1}{2}$$

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda x}}{x!} \quad x = 0, 1, 2, 3, 4, \dots \dots \dots, \alpha$$

$$P(X = 0) = \frac{e^{-2}}{0!} = e^{-2} = 0.135$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.135 = 0.865$$

مثال (33) - إذا علمت أن معدل عدد الحوادث التي تقع في الطريق الدائري هو 8 حوادث شهرياً فأوجد:

1 - احتمال وقوع أكثر من حادث واحد خلال الشهر القادم.

2 - القيمة المتوقعة والانحراف المعياري لعدد الحوادث التي يمكن أن تقع في هذا الطريق خلال الشهر القادم.

الحل:

نفرض  $X$  تمثل عدد الحوادث التي يمكن أن تقع في هذا الطريق خلال الشهر.

$X$  يتبع توزيع بواسون بمعدل  $\lambda = 8$  وبالتالي فإن دالة كثافة هذا المتغير هي:

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \quad x = 0, 1, 2, 3, 4, \dots \dots \dots, \alpha$$

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = 1 - \left( \frac{e^{-8} 8^0}{0!} + \frac{e^{-8} 8^1}{1!} \right) = 1 - (0.00034 + 0.00268) = 1 - 0.00302 = 0.997$$

$$E(X) = \lambda = 8 \quad \sigma_x = \sqrt{\lambda} = 2.828$$

مثال (34) - إذا كانت نسبة الإنتاج المعيب من إنتاج أحد المصانع هي 1% وكانت هذه السلة تعبأ في صناديق كل صندوق يسع 300 وحدة، فأوجد احتمال أن يكون في أحد هذه الصناديق 3 وحدات معيبة.

الحل:

نفرض  $X$  يمثل عدد الوحدات المعيبة في كل صندوق من هذه الصناديق.

$X$  يتبع توزيع ذي الحدين  $n = 300, p = 0.01$  وصحيت  $P$  صغيرة و  $n$  كبيرة يمكن

تقريب توزيع ذي الحدين إلى توزيع بواسون بمعدل  $\lambda = np = 300 \times 0.01$

$$P(x = 3) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} = \frac{0.05 \times 21}{6} = 0.224$$

7- بعض أهم التوزيعات الاحتمالية المتصلة:

أ- التوزيع المنتظم (Uniform distribution):

يعتبر التوزيع المنتظم من أبسط التوزيعات الاحتمالية المتصلة في الفترة  $[a, b]$  حيث  $a, b$  عدديان حقيقيان.

لذلك فإن  $\mu$ ،  $\sigma$  هما معالم التوزيع الطبيعي. حيث بمعرفة  $\mu$ ،  $\sigma$  لأي متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي يكون في الإمكان حساب الاحتمالات المختلفة لهذا المتغير وذلك باستخدام العلاقة الاحتمالية السابقة.

وإذا كان  $X$  متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط  $\mu$  وتباين  $\sigma^2$  فيرمز بالرمز  $N(\mu, \sigma^2) \sim X$  ومن خواص التوزيع الطبيعي ما يلي:

1- المساحة الكلية تحت منحنى التوزيع تساوي واحداً أي مجموع الاحتمالات في التوزيع يساوي الواحد الصحيح أي  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

2- دالة كثافة للتوزيع الطبيعي متماثلة حول المتوسط الحسابي. أي أنه عند إسقاط عمود من قمة المنحنى على المحور الأفقي فإن هذا العمود يقسم المنحنى إلى جزئين متماثلين ويعين متوسط الظاهرة على المحور الأفقي وبالتالي فإن:

$$1 - P(-\infty < X < \mu) = P(\mu < X < \infty) = 0.5$$

$$\text{أي } 50\% \text{ من المساحة الكلية تحت المنحنى محصورة بين } \mu \text{ و } \mu + \sigma$$

$$2 - P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.6829$$

$$\text{أي } 68.28\% \text{ محصورة بين المساحة الكلية تحت منحنى التوزيع } \mu - \sigma \text{ و } \mu + \sigma$$

$$3 - P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0.9545$$

$$\text{أي } 95.45\% \text{ من المساحة الكلية تحت منحنى التوزيع محصورة بين } \mu - 2\sigma \text{ و } \mu + 2\sigma$$

$$4 - P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0.9973$$

$$\text{أي } 99.73\% \text{ محصورة المساحة الكلية تحت منحنى التوزيع } \mu - 3\sigma \text{ و } \mu + 3\sigma$$

وحيث إن الظواهر الطبيعية تختلف في متوسطاتها وتبايناتها اختلافاً لا نهائياً حتى وإن كانت متساوية في المتوسطات فقد تختلف في التباينات، وإذا كانت متساوية في التباينات فقد تختلف في المتوسطات. فالتشكل (0-8) يوضح منحنيات طبيعية لها نفس المتوسط مع اختلافها في تبايناتها.

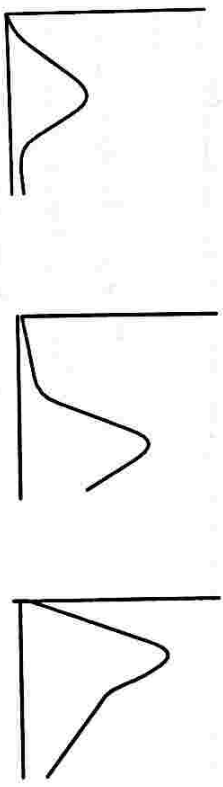
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \dots \dots \dots x \geq 0$$

$$P(x < 2) = \int_0^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \left[ -e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \right]_0^2 = 1 - e^{-1} = 1 - 0.368 = 0.632$$

$$P(x < 2) = \int_1^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \left[ -e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \right]_1^{\infty} = e^{-1} - 0 = 0.368$$

ج- التوزيع الطبيعي (Normal distribution):

إذا كانت لدينا بيانات حول ظاهرة معينة ورسمنا المنحنى التكراري لهذه الظاهرة فنلاحظ ما يكون الشكل العام لهذا المنحنى يأخذ أحد الأشكال (0-5) (0-6) (0-7) :



شكل (0-7)

شكل (0-6)

شكل (0-5)

ونلاحظ في الشكل (0-5) أن معظم المفردات تركزت عند القيم الصغرى للظاهرة لذلك صعد المنحنى بسرعة وهبط ببطء وهذا ما يعرف بالمنحنى الملتوي إلى اليمين. وفي الشكل (0-6) نلاحظ أن معظم المفردات تركزت عند القيم الكبرى للظاهرة لذلك صعد المنحنى ببطء وهبط بسرعة وهذا ما يسمى بالمنحنى الملتوي إلى اليسار. أما في الشكل (0-7) فنلاحظ أن معظم المفردات تركزت عند القيم الوسطى للظاهرة وتقل تدريجياً من الطرفين كلما بعدنا عن هذه القيم لذلك أخذ المنحنى شكل الجرس، وعند إسقاط عمود من قمة المنحنى على المحور الأفقي يقسم المنحنى إلى قسمين متساويين وهذا ما يعرف بالمنحنى المتماثل أو المنحنى الممتدل حيث يعرف توزيعه الاحتمالي بالتوزيع الممتدل أو التوزيع الطبيعي وهو من أشهر التوزيعات الاحتمالية المتعملة حيث وجد أن معظم الظواهر الطبيعية تتبع في تغيراتها لهذا التوزيع. كما يمكن تقريب بعض التوزيعات الأخرى إلى صورة التوزيع الطبيعي تحت ظروف معينة.

وتعرف دالة التوزيع الطبيعي أو دالة كثافة التوزيع الطبيعي لهذا المتغير بالمعادلة التالية:

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \dots \dots \dots -\infty < X < \infty$$

حيث  $\mu$  هي متوسط التوزيع  $-\infty < \mu < \infty$

$\sigma$  هي الانحراف المعياري للتوزيع  $\sigma > 0$

$$\text{أما } \pi, e \text{ فهني ثوابت حيث } \pi = 3.14 \text{ و } e = 2.718$$

2- دالة كثافة التوزيع الطبيعي المعياري متماثلة حول الصفر أي أن:

$$1 - P(-\infty < Z < 0) = P(0 < Z < \infty) = 0.5$$

أي 50% من المساحة الكلية تحت منحنى التوزيع المعياري محصورة بين 0 و  $\infty$

$$2 - P(-1.96 \leq X \leq 1.96) = 0.95$$

أي أن 95% من المساحة الكلية تحت منحنى التوزيع الطبيعي المعياري تقع بين -1.96 ، 1.96

$$3 - P(-2.58 \leq X \leq 2.58) = 0.99$$

أي أن 99% من المساحة الكلية تحت منحنى التوزيع الطبيعي المعياري تقع بين -2.58 ، 2.58

لذلك وضعت جداول خاصة لهذا التوزيع. تغطي احتمال أن المتغير العشوائي المعياري يأخذ قيمة محصورة بين الصفر وقيمة المتغير. والبيض الآخر يعطي احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي المعياري قيمة أقل من قيمة معيارية معينة (بين  $\infty$  - وقيمة المتغير) كما في الجدول (7).

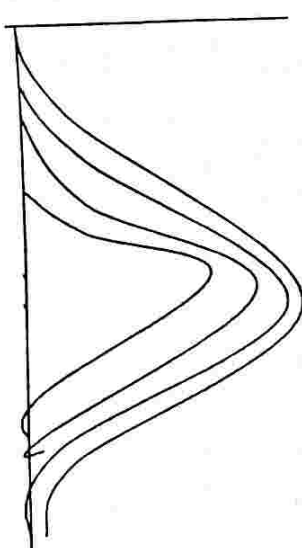
وفي هذه الجداول نجد أن العمود الأول فيه القيم المختلفة لقيم المتغير المعياري (العدد الصحيح والقيمة الأولى بعد الفاصلة). في حين في الصف الأول فيه القيم المختلفة لقيم المتغير المعياري للعدد الثاني بعد الفاصلة.

فمثلاً للبحث في  $P(Z < 1.58)$  من الجدول الذي يعطي احتمال أن المتغير المعياري يأخذ قيمة أقل من قيمة معيارية معينة، نبحث عن 1.5 في العمود الأول وتحت 0.08 في الصف الأول؛ فالقيمة المناظرة هي المساحة المطلوبة وتساوي 0.9429 بالتالي فإن  $P(Z < 1.58) = 0.9429$ .

أما للبحث عن  $P(Z > 0.15)$  من نفس الجدول فنغير أولاً العلامة من أكبر إلى أقل باستخدام إحدى الطريقتين التاليتين  $P(Z < -0.15)$  أو  $P(Z < 0.15) - 1$ ، لاستخدام الطريقة الأولى ثم نبحث في الجدول عن القيمة المناظرة لـ (0.15) في العمود الأول تحت (0.05) في الصف الأول وهي 0.4404. وفي حالة استخدام الطريقة الثانية نبحث في الجدول عن القيمة المناظرة لـ (0.1) في العمود الأول وتحت (0.05) في الصف الأول وهي 0.5396 ثم نطرح الناتج من الواحد الصحيح فنحصل على 0.4404 وهي نفس النتيجة الأولى أي أن  $P(Z > 0.14) = 0.4404$ .

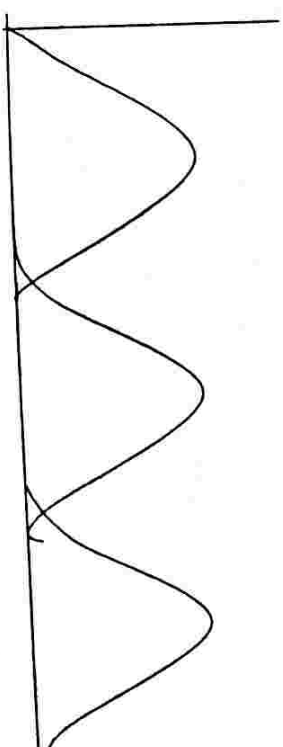
أما للبحث عن  $P(1.24 < Z < 2.08)$  فنجد أن:

$$P(1.24 < Z < 2.08) = P(Z < 2.08) - P(Z < 1.24) = 0.9812 - 0.8925 = 0.887$$



شكل (8 - 0)

في حين الشكل (9 - 0) يوضح منحنيات طبيعية لها نفس التباين ولكنها تختلف في متوسطاتها.



شكل (9 - 0)

ولكن يمكن تحويل أي متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط  $\mu$  وتباين  $\sigma^2$  إلى متغير آخر يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي صفراً وتباين يساوي الواحد الصحيح ويعرف بالمتغير الطبيعي المعياري ويرمز له بالرمز Z حيث:

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

وبذلك تكون دالة الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير تأخذ المعادلة التالية:

$$P(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad -\infty < Z < \infty$$

ومن خواص التوزيع الطبيعي المعياري ما يلي:

1- المساحة الكلية تحت منحنى الدالة تساوي واحداً (مجموع الاحتمالات يساوي الواحد الصحيح).

الحل :

نفرض  $X$  تمثل مقاومة الأسلاك الكهربائية المنتجة.  $X$  يتبع التوزيع الطبيعي  $\mu$

$$\sigma = 2 \text{ و } 40$$

$$P(X > 43) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{43 - 40}{2}\right) = P(Z > -\frac{3}{2})$$

$$= P(Z > -1.5) = P(Z \leq +1.5) = 0.5668$$

مثال (39) - إذا كان عدد المعاملات التي يقوم بها المصرف التجاري في الأسبوع

يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 3500 ومعيار وانحراف معياري قدره 200 معادلة فأوجد :

1- احتمال أن يقوم بأكثر من 3500 معادلة خلال الأسبوع القادم.

2- احتمال أن يقوم بعدد من المعاملات تتراوح بين 3300، 3900 معادلة.

3- احتمال أن يقوم بأقل من 2900 معادلة.

الحل :

نفرض  $X$  تمثل عدد المعاملات التي يقوم بها المصرف التجاري في الأسبوع  $X$  يتبع

التوزيع الطبيعي  $\mu = 3500$  و  $\sigma = 200$ .

$$1 - P(X > 3500) = P(Z > \frac{3500 - 3500}{200}) = P(Z > 0)$$

$$= P(X > 3500) = P(Z > 0) = P(Z < 0) = 0.5$$

$$2 - P(3300 < X < 3900) = P\left(\frac{3300 - 3500}{200} < Z < \frac{3900 - 3500}{200}\right)$$

$$= P(-1 < Z < 2) = P(Z < 2) - P(Z < -1) = 0.9772 - 0.8413 = 0.1359$$

$$3 - P(X < 2900) = P(Z < \frac{2900 - 3500}{200}) = P(Z < -3) = 0.0013$$

مثال (40) - إذا علمت أن المصاريف الشهرية لمتنأة ما تتبع التوزيع الطبيعي

بمتوسط قدره 2000 د. ل وانحراف معياري 100 د. ل، فإذا كانت الميزانية المحددة

للسنة القادمة لهذه المتنأة هي 2200 د. ل فما احتمال أن المصاريف الشهرية تزيد عن

هذه الميزانية المحددة؟ وإذا أرادت اللجنة الشعبية لهذه المتنأة أن تجعل احتمال زيادة

المصاريف عن الميزانية المحددة التي تحددها للسنة القادمة لا تتعدى 10% فما هو المقدار الذي

يجب أن تقترحه للميزانية حتى يحقق عرضها هذا؟

الحل :

نفرض  $X$  تمثل المصاريف الشهرية لهذه المتنأة.  $X$  يتبع التوزيع الطبيعي  $\mu =$

$$P(X > 2200) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{2200 - 2000}{100}\right) = P(Z > 2)$$

$$\sigma = 200 \text{ و } 3500$$

وكذلك يمكن استخدام هذه الجداول لإيجاد القيمة المعيارية  $\alpha$  التي تحقق  $P(Z$

$= \alpha) < \alpha$  عندما تكون لدينا معلومة. بالبحث في الجدول على أقرب قيمة لاحتمال  $\alpha$

ثم نحدد قيمة  $Z$  المناظرة لها ونساورها  $Z$ .

فمثلاً لإيجاد قيمة  $\alpha$  التي تحقق  $P(Z < \alpha) = 0.2845$  نبحث في الجدول عن

أقرب قيمة لاحتمال وهي 0.2845 ثم نحدد قيمة  $Z$  المناظرة لها وهي (0.57) ونساورها

$$\alpha \text{ أي أن } Z = -0.57$$

يمكن إيجاد احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي الذي يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط

$\mu$  وتباين  $\sigma^2$  أية قيمة بعد تحويل المتغير إلى الصورة المعيارية وذلك بطرح المتوسط من

القيمة الأصلية للمتغير وقسمة الناتج على الانحراف المعياري.

وفي ما يلي أمثلة تطبيقية على استخدامات هذا التوزيع.

مثال (37) - إذا كان توزيع درجات طلبة هذا الفصل في الامتحان الأول لمادة

الإحصاء يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 70 درجة وانحراف معياري قدره 10 درجات. فإذا

تم اختيار طالب عشوائياً من طلبة هذا الفصل فأوجد :

1- احتمال أن يكون الطالب المختار درجته أكثر من 80 درجة.

2- احتمال أن يكون الطالب المختار درجته أقل من أو تساوي 75 درجة.

3- احتمال أن يكون الطالب المختار درجته محصورة بين 75، 80 درجة.

الحل :

نفرض  $X$  تمثل درجة الطالب المختار.  $X$  يتبع التوزيع الطبيعي  $\mu = 70$  و  $\sigma = 10$ .

حيث إنه لا يمكن إيجاد الاحتمالات المطلوبة من الجداول إلا بعد تحويل القيم

الأصلية إلى قيم معيارية ثم البحث في الجدول فنجد أن :

$$P(X > 80) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{80 - 70}{10}\right) = P(Z > 1)$$

$$= 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

$$P(X \leq 75) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{75 - 70}{10}\right) = P(Z \leq 0.5) = 0.6915$$

$$P(75 < X < 80) = P\left(\frac{75 - 70}{10} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{80 - 70}{10}\right)$$

$$= P\left(\frac{1}{2} < Z < 1\right) = P(Z \leq 1) - P(Z \leq 0.5) = 0.8413 - 0.6915 = 0.5668$$

مثال (38) - مصنع ينتج الأسلاك الكهربائية بمقاومة متوسطة 40 وأتاً وانحراف

معياري 2 وأتاً، فإذا كانت مقاومة الأسلاك الكهربائية التي ينتجها هذا المصنع تتبع التوزيع

الطبيعي فما هي نسبة الأسلاك الكهربائية التي تزيد مقاومتها عن 43 وأتاً؟

مثال (42) - إذا كان توزيع رواتب المنتجين في أحد المصانع يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط قدره 100 وتباين قدره 9 فأوجد عدد المنتجين الذين تتراوح رواتبهم بين 91 و106 إذا كان عدد المنتجين في هذا المصنع 8000 منتج.

نفرض  $X$  تمثل رواتب المنتجين في هذا المصنع.  $X$  يتبع التوزيع الطبيعي ب  $\mu$

$$\sigma = 3 \text{ و } 100$$

$$P(91 < X < 106) = P\left(\frac{91-100}{3} < Z < \frac{106-100}{3}\right)$$

$$P(9 < X < 106) = P(-3 < Z < 2) = P(Z < 2) - P(Z < -3)$$

$$= P(Z < 2) - [1 - P(Z < 3)]$$

$$= 0.9772 - [1 - 0.9987] = 0.9772 - [0.0013] = 0.89759$$

$$7807 = \frac{0.9759 \times 8000}{10000} = 106 \text{ و } 19 \text{ عدد المنتجين الذين تتراوح رواتبهم بين}$$

مثال (43) - إذا كان عمر المصاييح الكهربية التي تنتجها أحد المصانع يتبع التوزيع الطبيعي وكان 92.5% من المصاييح يزيد عمرها عن 2160 ساعة بينما 3.92% من المصاييح يزيد عمرها عن 17040. أوجد القيمة المتوقعة والانحراف المعياري لعمر هذه المصاييح.

الحل:

نفرض  $X$  تمثل عمر المصاييح المنتجة.  $X$  يتبع التوزيع الطبيعي.

$$P(X > 2160) = 0.9325$$

$$P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{2160-\mu}{\sigma}\right) = 0.925$$

$$P\left(Z \leq -\frac{2160-\mu}{\sigma}\right) = 0.925$$

$$P(Z \leq 1.44) = 0.925$$

$$\therefore 1.44 = -\frac{2160-\mu}{\sigma}$$

$$-1.44\sigma = 2160 - \mu$$

$$\therefore \mu = 2160 + 1.44\sigma \dots \dots \dots (1)$$

$$P(X > \frac{17040-\mu}{\sigma}) = 0.0392$$

$$= 1 - P\left(Z \leq \frac{17040-\mu}{\sigma}\right) = 0.0392$$

$$P(Z \leq 1.76) = 0.9608$$

$$= 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0.9773 = 0.0227$$

نفرض  $A$  تمثل الميزانية المحددة للشهر القادم وبالتالي فإن:

$$P(X > A) = 0.10$$

$$P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{A-2000}{100}\right) = 0.10$$

$$= 1 - P\left(Z < \frac{A-2000}{100}\right) = 0.10$$

$$= P\left(Z < \frac{A-2000}{100}\right) = 0.90$$

$$1.28 = \frac{A-2000}{100}$$

$$A = 2000 + 128 = 2128$$

مثال (41) - إذا كان الطلب الأسبوعي على سلعة معينة في أحد الأسواق يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 200 وحدة وانحراف معياري 20 وحدة فإذا كان تزويد السوق يأخذ أسبوعاً لتصل من المخازن إلى السوق فما هو أقل عدد من هذه السلعة يجب أن تكون لدى السوق قبل طلب تزويده من المخازن حتى يكون احتمال أن لا ينفذ ما لديه من هذه السلعة قبل وصول التزويد هو 95%؟

الحل:

نفرض  $X$  هو عدد الوحدات المطلوبة.  $X$  يتبع التوزيع الطبيعي ب  $\mu = 200$  و  $\sigma = 20$ .

نفرض  $A$  يمثل ما لدى السوق قبل طلب تزويده من المخازن.

لكي لا ينفذ ما لدى السوق يجب أن يكون الطلب أقل من عدد الوحدات التي لدى السوق أي أن:

$$P(X < A) = 0.95$$

$$P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{A-200}{20}\right) = 0.95$$

$$P\left(Z < \frac{A-200}{20}\right) = 0.95$$

$$P(Z < 1.64) = 0.95$$

$$\frac{A-200}{20} = 1.64$$

$$A - 200 = 20 \times 1.64$$

$$A = 200 + 33 = 233$$

عليه يجب على السوق أن يطلب تزويده من المخازن بهذه السلعة إذا وصل ما لديه عليه 233 وحدة.

ب. حيث إن  $\mu$  كبيرة،  $P$  تقترب من النصف لذلك فإن  $X$  يقترب إلى التوزيع الطبيعي

$$\mu = np = 100 \times 0.10 = 10$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100 \times 0.1 \times 0.90} = 3$$

$$P(X < 13) = P(Z < \frac{13.5-10}{3}) = P(Z < 1.16) = 0.1216$$

$$P(X \geq 13) = P(Z > \frac{12.5-10}{3}) =$$

تقريب توزيع بواسون إلى التوزيع الطبيعي:

إذا كان  $X$  متغيراً عشوائياً يتبع توزيع بواسون وكانت  $\lambda$  كبيرة فإنه يمكن تقريب  $X$  إلى التوزيع الطبيعي.

$$Z = \frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \approx N(0,1) \text{ وبالتالي } \sigma^2 = \lambda \text{ و } \mu = \lambda$$

بعد إيجاد القيمة الحقيقية للقيمة  $X$ :

مثال (46) - إذا كان متوسط عدد المكالمات الهاتفية التي تستقبلها بداية إحدى الشركات هو 50 مكالمه في الساعة. فما احتمال أن تستقبل أكثر من 40 مكالمه في إحدى الساعات؟

الحل:

نفرض  $X$  يمثل عدد المكالمات التي تستقبلها هذه البداية في الساعة،  $X = 0, 1, 2, \dots, \infty$

$X$  يتبع توزيع بواسون ب  $\lambda = 50$

وحيث إن  $\lambda$  كبيرة فيمكن تقريب  $X$  إلى التوزيع الطبيعي بمتوسط  $\mu = 50$

وبالتالي:

$$P(X > 40) = P(Z > \frac{40.5-50}{\sqrt{50}}) = P(Z > -1.34) = P(Z < 1.34) = 0.9099$$

$$\therefore 1.76 = \frac{17040 - \mu}{\sigma}$$

$$\sigma = \frac{17040 - \mu}{1.76} \dots \dots \dots (2)$$

$$\therefore \mu = 2160 + 1.44 \left( \frac{17040 - \mu}{1.76} \right) = 2160 + 13941.818 - 0.818\mu$$

$$1.818\mu = 16101.818$$

$$\mu = \frac{16101.818}{1.818} = 8856.886$$

$$\therefore \sigma = \frac{17040 - 8856.886}{1.76} = \frac{8183.114}{1.76} = 4649.497$$

مثال (44) - إذا علم أن حجم البديل التي ينتجها أحد المصانع يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط قدره 38 وانحراف معياري 3 فاحسب الأعداد التي يجب أن ينتجها من الأحجام ما بين 34 و36 إذا أراد أن ينتج 2000 قطعة.

الحل:

نفرض  $X$  تمثل حجم البديل التي ينتجها هذا المصنع.  $X$  يتبع التوزيع الطبيعي ب  $\mu = 38$  و  $\sigma = 3$

$$P(34 \leq X \leq 36) = P\left(\frac{34-38}{3} \leq \frac{36-38}{3}\right) = P(-1.33 \leq Z \leq -0.67)$$

$$= P(0.67 \leq Z \leq 1.33) = P(Z < 1.33) - P(Z < 0.67) = 0.9082 - 0.7486 = 0.1596$$

عدد البديل التي يجب أن ينتجها هذا المصنع من الحجم (34 - 36)  $\times 2000 = 319 = 0.1596$

تقريب توزيع ذي الحدين إلى التوزيع الطبيعي:

إذا كان  $X$  متغيراً عشوائياً يتبع توزيع ذي الحدين وكانت  $n$  كبيرة،  $P$  تقترب إلى النصف فيمكن تقريب  $X$  إلى التوزيع الطبيعي بمتوسط  $\mu = np$  وبتباين  $\sigma^2 = npq$  وبالتالي فإن:

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \approx N(0,1)$$

بعد إيجاد القيمة الحقيقية للقيمة  $X$ :

مثال (45) - إذا كانت نسبة المعيب من إنتاج آلة معينة هي 10% بحيث عينة عشوائية من 100 وحدة من إنتاج هذه الآلة فأوجد احتمال أن تكون في العينة أقل من 13 وحدة معيبة.

الحل:

نفرض  $X$  يمثل عدد الوحدات المعيبة في العينة 100،  $X = 0, 1, 2, \dots, 100$ . يتبع توزيع ذي الحدين ب  $n = 100$ ،  $p = 0.10$ .



# الجدول

## جدول رقم (1) احتمالات توزيع ذي الحدين

$$C_n^x P^x q^{n-x}, x = 0, 1, 2, \dots, n$$

n = 2, 3, 4, ..., 10

P = 0.01, 0.05(0.05) 0.30, 1/3, 0.35 (0.05) 0.50, P = 0.49

n	x	P 01	05	10	15	20	25	30	1/3	35	40	45	49	50
2	0	.9901	.9025	.8100	.7235	.6459	.5625	.4800	.4044	.3225	.2400	.1625	.0801	.0000
2	1	.0198	.0975	.1800	.2765	.3541	.4375	.5160	.5856	.6575	.7280	.7950	.8599	.9199
2	2	.0001	.0975	.1800	.2765	.3541	.4375	.5160	.5856	.6575	.7280	.7950	.8599	.9199
3	0	.9901	.8473	.7290	.6357	.5625	.5123	.4719	.4330	.3963	.3625	.3225	.2801	.2350
3	1	.0294	.1584	.2430	.3551	.4801	.6123	.7419	.8644	.9765	.1000	.0000	.0000	.0000
3	2	.0001	.0071	.0270	.0574	.0975	.1406	.1856	.2222	.2589	.2880	.3141	.3371	.3550
3	3	.0001	.0071	.0270	.0574	.0975	.1406	.1856	.2222	.2589	.2880	.3141	.3371	.3550
4	0	.9606	.8145	.6561	.5220	.4096	.3164	.2401	.1975	.1785	.1796	.1945	.0077	.0025
4	1	.0394	.2115	.3216	.3665	.4096	.4219	.4116	.3951	.3845	.3456	.2995	.2600	.2080
4	2	.0006	.0135	.0246	.0575	.1575	.2109	.2466	.2963	.3105	.3456	.3675	.3767	.0050
4	3	.0006	.0135	.0246	.0575	.1575	.2109	.2466	.2963	.3105	.3456	.3675	.3767	.0050
5	0	.9510	.7738	.5905	.4437	.3377	.2773	.2273	.1881	.1517	.1160	.0778	.0503	.0312
5	1	.0489	.2036	.3280	.3915	.4196	.3955	.3402	.3292	.3124	.2592	.2059	.1657	.1562
5	2	.0010	.0214	.0729	.1382	.2048	.2637	.2987	.3292	.3364	.3456	.3369	.3185	.1825
5	3	.0001	.0014	.0081	.0244	.0575	.0979	.1323	.1646	.1811	.2394	.2757	.3040	.3125
5	4	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001
6	0	.9415	.7351	.5114	.3771	.2621	.1780	.1176	.0878	.0754	.0667	.0277	.0176	.0156
6	1	.0571	.2321	.3543	.3993	.3932	.3560	.3025	.2634	.2457	.1866	.1359	.1014	.0938
6	2	.0014	.0305	.0764	.1762	.2498	.2866	.3241	.3292	.3280	.3110	.2780	.2437	.2344
6	3	.0000	.0021	.0146	.0415	.0819	.1313	.1852	.2195	.2355	.2276	.2032	.1721	.1225
6	4	.0000	.0000	.0000	.0004	.0015	.0044	.0102	.0165	.0205	.0369	.0609	.0864	.0938
6	5	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0007	.0014	.0018	.0041	.0083	.0139	.0156

## جدول رقم (2)

دالة التوزيع التراكمية لتوزيع ذي الحدين

$$\sum_{r=0}^x C_r^n p^r q^{n-r}$$

n \ r	p									
	10	20	25	30	40	50	60	70	80	90
1	0.900	0.800	0.750	0.700	0.600	0.500	0.400	0.300	0.200	0.100
2	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
3	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
4	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
5	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
6	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
7	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
10	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

## تابع الجدول رقم (1)

n \ r	p									
	10	20	25	30	40	50	60	70	80	90
1	0.900	0.800	0.750	0.700	0.600	0.500	0.400	0.300	0.200	0.100
2	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
3	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
4	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
5	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
6	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
7	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
10	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

# جدول رقم (3)

الدالة الأسية

$x$	$e^{-x}$	$e^x$
.01	.9900	1.0101
.02	.9802	1.0202
.03	.9704	1.0305
.04	.9608	1.0408
.05	.9512	1.0513
.06	.9418	1.0618
.07	.9324	1.0725
.08	.9231	1.0833
.09	.9139	1.0942
.10	.9048	1.1052
.20	.8187	1.2214
.30	.7408	1.3499
.40	.6703	1.4918
.50	.6065	1.6487
.60	.5488	1.8221
.70	.4966	2.0138
.80	.4493	2.2255
.90	.4066	2.4596
1.00	.3679	2.7183
2.00	.1353	7.3891
3.00	.04979	20.0866
4.00	.01832	54.598
5.00	.00674	148.41
6.00	.00248	403.43
7.00	.000912	1096.6
8.00	.000335	2981.0
9.00	.000123	8103.1
10.00	.000045	22026.0

# تابع جدول رقم (2)

$n$	$p$									
	.10	.20	.25	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90
8	.4305	.1678	.1001	.0576	.0168	.0039	.0007	.0001	.0000	
7	.3437	.1001	.0576	.0253	.0064	.0015	.0003	.0001	.0000	
6	.2689	.0678	.0362	.0188	.0045	.0009	.0002	.0001	.0000	
5	.2051	.0432	.0243	.0135	.0032	.0005	.0001	.0000	.0000	
4	.1523	.0287	.0165	.0098	.0022	.0003	.0001	.0000	.0000	
3	.1104	.0183	.0105	.0061	.0015	.0002	.0001	.0000	.0000	
2	.0793	.0119	.0067	.0038	.0010	.0002	.0001	.0000	.0000	
1	.0540	.0072	.0040	.0023	.0010	.0002	.0001	.0000	.0000	
0	.0374	.0042	.0021	.0011	.0005	.0002	.0001	.0000	.0000	
9	.3874	.1342	.0751	.0404	.0101	.0020	.0003	.0000	.0000	
8	.3020	.0975	.0540	.0287	.0098	.0015	.0003	.0000	.0000	
7	.2293	.0670	.0374	.0218	.0088	.0010	.0002	.0000	.0000	
6	.1714	.0470	.0270	.0165	.0072	.0005	.0001	.0000	.0000	
5	.1259	.0333	.0199	.0119	.0058	.0003	.0001	.0000	.0000	
4	.0915	.0243	.0145	.0088	.0045	.0002	.0001	.0000	.0000	
3	.0670	.0177	.0105	.0061	.0032	.0002	.0001	.0000	.0000	
2	.0470	.0119	.0067	.0038	.0015	.0002	.0001	.0000	.0000	
1	.0312	.0072	.0040	.0023	.0010	.0002	.0001	.0000	.0000	
0	.0199	.0042	.0021	.0011	.0005	.0002	.0001	.0000	.0000	
10	.3487	.1074	.0563	.0232	.0060	.0010	.0001	.0000	.0000	
9	.2706	.0758	.0396	.0193	.0046	.0007	.0001	.0000	.0000	
8	.2051	.0526	.0270	.0135	.0032	.0005	.0001	.0000	.0000	
7	.1523	.0362	.0205	.0098	.0022	.0003	.0001	.0000	.0000	
6	.1104	.0243	.0145	.0088	.0015	.0002	.0001	.0000	.0000	
5	.0793	.0177	.0105	.0061	.0032	.0002	.0001	.0000	.0000	
4	.0540	.0119	.0067	.0038	.0015	.0002	.0001	.0000	.0000	
3	.0374	.0072	.0040	.0023	.0010	.0002	.0001	.0000	.0000	
2	.0243	.0042	.0021	.0011	.0005	.0002	.0001	.0000	.0000	
1	.0165	.0021	.0011	.0005	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	
0	.0105	.0011	.0005	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	
11	.3138	.0859	.0412	.0198	.0036	.0005	.0000	.0000	.0000	
10	.2440	.0563	.0270	.0135	.0032	.0005	.0000	.0000	.0000	
9	.1876	.0396	.0205	.0098	.0022	.0003	.0001	.0000	.0000	
8	.1405	.0270	.0145	.0088	.0015	.0002	.0001	.0000	.0000	
7	.1054	.0177	.0105	.0061	.0032	.0002	.0001	.0000	.0000	
6	.0793	.0119	.0067	.0038	.0015	.0002	.0001	.0000	.0000	
5	.0540	.0072	.0040	.0023	.0010	.0002	.0001	.0000	.0000	
4	.0374	.0042	.0021	.0011	.0005	.0002	.0001	.0000	.0000	
3	.0243	.0021	.0011	.0005	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	
2	.0165	.0011	.0005	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	
1	.0105	.0005	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	
0	.0067	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	

## جدول رقم (5)

دالة التوزيع التراكمية لتوزيع بواسون  

$$\sum_{s=0}^x e^{-\lambda} \lambda^s / s!$$

x	$\lambda$								
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6730	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066
1	0.9953	0.9825	0.9631	0.9384	0.9098	0.8781	0.8442	0.8088	0.7725
2	0.9998	0.9989	0.9964	0.9921	0.9856	0.9769	0.9659	0.9526	0.9371
3	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9982	0.9966	0.9942	0.9909	0.9865
4		1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9986	0.9977
5				1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997
6							1.0000	1.0000	1.0000

x	$\lambda$								
	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
0	0.3679	0.2231	0.1353	0.0721	0.0498	0.0302	0.0183	0.0111	0.0067
1	0.7338	0.5578	0.4060	0.2873	0.1991	0.1359	0.0916	0.0611	0.0404
2	0.9197	0.8088	0.6767	0.5438	0.4232	0.3208	0.2381	0.1736	0.1247
3	0.9810	0.9344	0.8571	0.7576	0.6472	0.5366	0.4335	0.3423	0.2650
4	0.9963	0.9814	0.9473	0.8912	0.8153	0.7254	0.6288	0.5321	0.4405
5	0.9994	0.9955	0.9834	0.9540	0.9161	0.8576	0.7851	0.7029	0.6160
6	0.9999	0.9991	0.9955	0.9858	0.9665	0.9347	0.8893	0.8311	0.7662
7	1.0000	0.9998	0.9989	0.9958	0.9881	0.9733	0.9483	0.9134	0.8666
8		1.0000	0.9998	0.9989	0.9962	0.9901	0.9786	0.9597	0.9319
9			1.0000	0.9997	0.9989	0.9967	0.9919	0.9829	0.9682
10				1.0000	0.9997	0.9997	0.9972	0.9933	0.9863
11					1.0000	0.9997	0.9991	0.9976	0.9945
12						1.0000	0.9997	0.9992	0.9980
13							1.0000	0.9997	0.9993
14								1.0000	0.9998
15									0.9999
16									1.0000

## جدول رقم (4)

احتمالات توزيع بواسون  

$$e^{-\lambda} \lambda^x / x!$$

$\lambda = 0.1(0.1)2(0.2)4(1)10$

$\lambda$	x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0.1		.9048	.0952	.0045	.0002	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
0.2		.8187	.1637	.0164	.0011	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
0.3		.7408	.2222	.0333	.0033	.0002	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
0.4		.6703	.2681	.0536	.0072	.0007	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
0.5		.6065	.3033	.0758	.0126	.0016	.0002	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
0.6		.5488	.3293	.0988	.0198	.0030	.0004	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
0.7		.4966	.3476	.1217	.0284	.0050	.0007	.0002	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
0.8		.4493	.3395	.1438	.0383	.0077	.0012	.0002	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
0.9		.4066	.3359	.1647	.0494	.0111	.0020	.0003	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
1.0		.3679	.3679	.1839	.0613	.0153	.0031	.0005	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
1.1		.3329	.3662	.2014	.0738	.0203	.0045	.0008	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
1.2		.3012	.3614	.2169	.0867	.0260	.0062	.0012	.0002	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
1.3		.2725	.3543	.2303	.0998	.0324	.0084	.0013	.0003	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
1.4		.2466	.3432	.2417	.1128	.0395	.0111	.0026	.0005	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
1.5		.2231	.3347	.2510	.1255	.0471	.0141	.0035	.0008	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
1.6		.2012	.3230	.2584	.1378	.0551	.0176	.0047	.0011	.0002	.0000	.0000	.0000	.0000
1.7		.1827	.3108	.2640	.1496	.0636	.0216	.0061	.0015	.0003	.0001	.0000	.0000	.0000
1.8		.1663	.2975	.2678	.1607	.0723	.0260	.0073	.0020	.0005	.0001	.0000	.0000	.0000
1.9		.1506	.2842	.2700	.1710	.0812	.0309	.0088	.0027	.0006	.0001	.0000	.0000	.0000
2.0		.1353	.2707	.2707	.1864	.0902	.0361	.0120	.0034	.0009	.0002	.0000	.0000	.0000
2.2		.1153	.2436	.2681	.1755	.1052	.0476	.0124	.0035	.0013	.0004	.0001	.0000	.0000
2.4		.0967	.2177	.2532	.1650	.1254	.0602	.0211	.0083	.0025	.0011	.0003	.0000	.0000
2.6		.0793	.1931	.2310	.1510	.1416	.0735	.0319	.0118	.0038	.0014	.0005	.0001	.0000
2.8		.0638	.1703	.2241	.1522	.1557	.0872	.0407	.0163	.0077	.0028	.0011	.0004	.0001
3.0		.0508	.1494	.2240	.1650	.1650	.1008	.0504	.0216	.0081	.0037	.0014	.0005	.0001
3.2		.0408	.1304	.2087	.1722	.1781	.1140	.0608	.0278	.0111	.0040	.0013	.0004	.0001
3.4		.0324	.1134	.1929	.1712	.1858	.1204	.0716	.0348	.0148	.0056	.0019	.0006	.0001
3.6		.0252	.0984	.1771	.1725	.1912	.1377	.0836	.0425	.0191	.0072	.0028	.0011	.0004
3.8		.0192	.0850	.1615	.1646	.1944	.1477	.0936	.0535	.0258	.0102	.0039	.0014	.0004
4.0		.0148	.0731	.1465	.1654	.1954	.1563	.1042	.0635	.0298	.0132	.0053	.0019	.0006
4.2		.0113	.0627	.1342	.1604	.1735	.1355	.1042	.0644	.0344	.0163	.0063	.0024	.0009
4.4		.0088	.0529	.1219	.1546	.1608	.1239	.1006	.0646	.0377	.0194	.0084	.0032	.0012
4.6		.0069	.0443	.1099	.1423	.1521	.1277	.1012	.0686	.0400	.0214	.0093	.0042	.0016
4.8		.0053	.0372	.1017	.1326	.1453	.1206	.0916	.0616	.0356	.0204	.0104	.0052	.0020
5.0		.0040	.0307	.0910	.1206	.1357	.1137	.0847	.0581	.0344	.0204	.0114	.0063	.0026
5.2		.0030	.0250	.0810	.1090	.1266	.1080	.0807	.0561	.0336	.0204	.0114	.0063	.0026
5.4		.0022	.0207	.0710	.0970	.1170	.1000	.0740	.0510	.0300	.0180	.0100	.0050	.0020
5.6		.0016	.0169	.0600	.0840	.1060	.0900	.0660	.0440	.0260	.0150	.0080	.0040	.0016
5.8		.0011	.0134	.0500	.0700	.0920	.0780	.0560	.0360	.0220	.0130	.0070	.0030	.0011
6.0		.0008	.0107	.0410	.0580	.0800	.0680	.0480	.0300	.0180	.0100	.0050	.0020	.0008
6.2		.0006	.0087	.0340	.0490	.0700	.0600	.0420	.0260	.0150	.0080	.0040	.0016	.0006
6.4		.0004	.0069	.0280	.0410	.0600	.0520	.0360	.0220	.0130	.0070	.0030	.0012	.0004
6.6		.0003	.0054	.0220	.0340	.0520	.0460	.0320	.0200	.0120	.0060	.0020	.0009	.0003
6.8		.0002	.0043	.0180	.0290	.0450	.0400	.0280	.0170	.0100	.0050	.0016	.0007	.0002
7.0		.0001	.0033	.0140	.0240	.0400	.0360	.0260	.0160	.0090	.0040	.0014	.0006	.0001
7.2		.0001	.0026	.0110	.0210	.0370	.0340	.0240	.0150	.0080	.0030	.0011	.0005	.0001
7.4		.0000	.0020	.0090	.0190	.0340	.0310	.0220	.0130	.0070	.0020	.0008	.0003	.0000
7.6		.0000	.0015	.0070	.0160	.0310	.0280	.0200	.0120	.0060	.0016	.0006	.0002	.0000
7.8		.0000	.0010	.0050	.0140	.0290	.0260	.0180	.0100	.0050	.0014	.0005	.0001	.0000
8.0		.0000	.0007	.0040	.0120	.0260	.0230	.0160	.0080	.0040	.0011	.0004	.0001	.0000
8.2		.0000	.0005	.0030	.0100	.0230	.0200	.0140	.0070	.0030	.0009	.0003	.0001	.0000
8.4		.0000	.0003	.0020	.0080	.0200	.0170	.0120	.0060	.0020	.0007	.0002	.0001	.0000
8.6		.0000	.0002	.0015	.0060	.0170	.0140	.0100	.0050	.0016	.0005	.0001	.0000	.0000
8.8		.0000	.0001	.0010	.0050	.0150	.0120	.0080	.0040	.0014	.0004	.0001	.0000	.0000
9.0		.0000	.0001	.0007	.0040	.0130	.0100	.0070	.0030	.0011	.0003	.0001	.0000	.0000
9.2		.0000	.0000	.0005	.0030	.0110	.0080	.0050	.0020	.0008	.0002	.0001	.0000	.0000
9.4		.0000	.0000	.0003	.0020	.0090	.0070	.0040	.0016	.0005	.0001	.0000	.0000	.0000
9.6		.0000	.0000	.0002	.0015	.0080	.0060	.0030	.0011	.0004	.0001	.0000	.0000	.0000
9.8		.0000	.0000	.0001	.0010	.0070	.0050	.0020	.0008	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000
10.0		.0000	.0000	.0000	.0007	.0060	.0040	.0016	.0005	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000

$\lambda$	x	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
5.0		.0013	.0005	.0002	.0001	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
6.0		.0002	.0002	.0001	.0001	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
7.0		.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
8.0		.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
9.0		.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
10.0		.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

## جدول رقم (6)

الدالة الكثافة للتوزيع الطبيعي القياسي

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.3989	.3989	.3988	.3986	.3984	.3982	.3980	.3977	.3973	.3971
0.1	.3970	.3965	.3961	.3956	.3951	.3945	.3939	.3932	.3925	.3918
0.2	.3910	.3902	.3894	.3885	.3876	.3867	.3857	.3847	.3836	.3825
0.3	.3814	.3802	.3790	.3778	.3765	.3752	.3739	.3725	.3712	.3697
0.4	.3683	.3668	.3653	.3637	.3621	.3605	.3589	.3572	.3555	.3538
0.5	.3521	.3503	.3485	.3467	.3448	.3429	.3410	.3391	.3372	.3352
0.6	.3332	.3312	.3292	.3271	.3251	.3230	.3209	.3187	.3166	.3144
0.7	.3123	.3101	.3079	.3056	.3034	.3011	.2989	.2966	.2943	.2920
0.8	.2897	.2874	.2850	.2827	.2803	.2780	.2756	.2732	.2709	.2685
0.9	.2661	.2637	.2613	.2589	.2565	.2541	.2516	.2492	.2468	.2444
1.0	.2420	.2396	.2371	.2347	.2323	.2299	.2275	.2251	.2227	.2203
1.1	.2179	.2155	.2131	.2107	.2083	.2059	.2036	.2012	.1989	.1965
1.2	.1942	.1919	.1895	.1872	.1849	.1826	.1804	.1781	.1758	.1736
1.3	.1714	.1691	.1669	.1647	.1626	.1604	.1582	.1561	.1539	.1518
1.4	.1497	.1476	.1456	.1435	.1415	.1394	.1374	.1354	.1334	.1315
1.5	.1295	.1276	.1257	.1238	.1219	.1200	.1182	.1163	.1145	.1127
1.6	.1109	.1092	.1074	.1057	.1040	.1023	.1006	.0989	.0973	.0957
1.7	.0940	.0925	.0909	.0893	.0878	.0863	.0848	.0833	.0818	.0804
1.8	.0790	.0775	.0761	.0748	.0734	.0721	.0707	.0694	.0681	.0669
1.9	.0656	.0644	.0632	.0620	.0608	.0596	.0584	.0573	.0562	.0551
2.0	.0540	.0529	.0519	.0508	.0498	.0488	.0478	.0468	.0459	.0449
2.1	.0440	.0431	.0422	.0413	.0404	.0396	.0387	.0379	.0371	.0363
2.2	.0355	.0347	.0339	.0332	.0325	.0317	.0310	.0303	.0297	.0291
2.3	.0283	.0277	.0270	.0264	.0258	.0252	.0245	.0239	.0233	.0229
2.4	.0224	.0219	.0213	.0208	.0203	.0198	.0194	.0189	.0184	.0180
2.5	.0175	.0171	.0167	.0163	.0158	.0154	.0151	.0147	.0143	.0139
2.6	.0136	.0132	.0129	.0126	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110	.0107
2.7	.0104	.0101	.0099	.0096	.0093	.0091	.0088	.0086	.0081	.0081
2.8	.0079	.0077	.0075	.0073	.0071	.0069	.0067	.0065	.0061	.0061
2.9	.0060	.0058	.0056	.0055	.0053	.0051	.0050	.0048	.0045	.0045
3.0	.0044	.0043	.0042	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036	.0035	.0034
3.1	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026	.0025	.0025
3.2	.0024	.0023	.0022	.0022	.0021	.0020	.0019	.0018	.0018	.0018
3.3	.0017	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014	.0013	.0013
3.4	.0012	.0012	.0012	.0011	.0011	.0010	.0010	.0010	.0009	.0009
3.5	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007	.0007	.0007	.0006
3.6	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004
3.7	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003	.0003
3.8	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003
3.9	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002

## تابع جدول رقم (5)

x	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5
0	0.0044	0.0025	0.0012	0.0006	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001
1	0.0266	0.0174	0.0112	0.0070	0.0045	0.0027	0.0019	0.0012	0.0008
2	0.0864	0.0620	0.0430	0.0298	0.0202	0.0138	0.0093	0.0062	0.0042
3	0.2017	0.1512	0.1118	0.0818	0.0581	0.0404	0.0301	0.0212	0.0149
4	0.3572	0.2851	0.223	0.1750	0.1381	0.0985	0.0744	0.0550	0.0405
5	0.5289	0.4457	0.3690	0.3007	0.2412	0.1912	0.1496	0.1157	0.0885
6	0.6867	0.6063	0.5275	0.4499	0.3785	0.3134	0.2562	0.2068	0.1646
7	0.8095	0.7340	0.6726	0.6187	0.5702	0.5262	0.4856	0.4457	0.4087
8	0.8944	0.8472	0.7916	0.7397	0.6920	0.6482	0.6074	0.5694	0.5341
9	0.9462	0.9111	0.8774	0.8305	0.7916	0.7506	0.7074	0.6629	0.6274
10	0.9747	0.9579	0.9332	0.9017	0.8622	0.8175	0.7654	0.7069	0.6429
11	0.9871	0.9799	0.9661	0.9469	0.9208	0.8891	0.8511	0.8074	0.7579
12	0.9955	0.9912	0.9840	0.9730	0.9575	0.9362	0.9091	0.8764	0.8384
13	0.9983	0.9986	0.9970	0.9943	0.9897	0.9832	0.9750	0.9654	0.9544
14	0.9994	0.9995	0.9988	0.9976	0.9954	0.9927	0.9886	0.9832	0.9766
15	0.9996	0.9998	0.9996	0.9990	0.9980	0.9963	0.9934	0.9891	0.9825
16	0.9999	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9984	0.9970	0.9947	0.9911
17	1.0000	0.9999	0.9998	0.9999	0.9997	0.9994	0.9987	0.9976	0.9957
18	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9997	0.9995	0.9989	0.9980
19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9996	0.9991
20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996
21	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999
22	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999
23	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999
24	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999

# جدول رقم (7)

الدالة التراكمية للتوزيع الطبيعي القياسي

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9405	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9592	.9601	.9610	.9619	.9628	.9637
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9912	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9978	.9979	.9980	.9981	.9982	.9983
2.9	.9984	.9985	.9986	.9987	.9988	.9989	.9990	.9991	.9992	.9993
3.0	.9994	.9995	.9996	.9997	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.1	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.2	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.3	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.4	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999

z	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417
$\Phi(z)$	.90	.95	.975	.99	.995	.999	.9995	.99995	.999995
$2[1 - \Phi(z)]$	.20	.10	.05	.02	.01	.002	.001	.0001	.00001